Examen - HLMA206

Session 2 - 27/06/2019

Le sujet est composé de 6 questions préliminaires et 3 exercices indépendants. Il est possible d'admettre et d'utiliser des résultats de l'énoncé pour répondre aux questions suivantes. Tout document et matériel électronique interdit. Il sera tenu compte de la clarté et de la précision de la rédaction.

Durée : 3 heures.

Questions préliminaires. Pour répondre aux questions **Q1** à **Q6** suivantes (et uniquement pour ces questions), il n'est pas demandé de justifier. Pour les questions **Q1**, **Q2**, **Q4** et **Q5**, des réponses sont proposées. Plusieurs d'entre elles peuvent être correctes.

Q1. Soit $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \text{ t.q. } x + y + z + t = x - y + z - t = 0\}$ et $F = \{\lambda(1, 0, 1, 0), \lambda \in \mathbb{R}\}$ Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies :

a) E et F sont en somme directe — *b*) $E \cap F = \{0\}$

c) E et F sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$ — *d*) $E + F = \mathbb{R}^4$.

Les assertions *a* et *b* sont vraies.

Q2. Soit $\mathcal{E}$ la famille contenant les vecteurs

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies :

a) La famille $\mathcal{E}$ est libre — *b*) La famille $\mathcal{E}$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$

c)La famille $\mathcal{E}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ — *d*) $\langle \mathcal{E} \rangle = \mathbb{R}^3$

Les assertions *b* et *d* sont vraies.

Q3. Pour quelles valeurs des coefficients $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ a-t-on que :

$$E_{a,b,c} := \left\{ f \in C([-1, 1]) \text{ t.q. } \quad af(x)^2 + bf(x) + c = 0 \quad \forall\, x \in [-1, 1] \right\}$$

est un sous-espace vectoriel de $C([-1, 1])$?

On a les équivalences

$$E_{a,b,c} \text{ sous-espace vectoriel de } C([-1, 1]) \;\Leftrightarrow\; b = c = 0 \text{ ou } a = c = 0$$

Q4. Parmi les suites (x_k) suivantes, laquelle est une subdivision de $[0, 1]$

a)$x_k = k,\ k \in \mathbb{N}$ — *b*)$x_k = 1/2^k,\ k \in \mathbb{N}$

c)$x_k = \dfrac{k}{10},\ k = 0, \ldots, 10.$ — *d*), $x_k = \pi^k,\ k = 0, 1, 2.$

La seule réponse correcte est c).

Q5. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. On suppose que f est simultanément continue sur $[0,1]$ et en escalier. Que peut-on dire de f à coup sûr :

a) $f(x) = 0$ pour tout $x \in [0,1]$ — b) f est polynomiale

c) f est constante — d) $f(x) = x$ pour tout $x \in [0,1]$

La seule assertion correcte à coup sûr est c).

Q6. Calculer le développement limité à l'ordre 5 en 0 de $f(x) = \ln(x^2 + \sqrt{1-x^2})$.

On trouve $f(x) = x^2/2 - x^4/4 + o(x^5)$.

Exercice 1. Soit $E = \mathbb{R}_2[x]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions polynômiales de degré inférieur ou égal à 2. On définit $\varphi : E \to E$ telle que, pour tout $P \in E$ la fonction $Q = \varphi(P)$ est définie par
$$Q(x) = P(x) - P(-x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

(1) Montrer que φ est bien définie et linéaire.

Si P est polynomiale de degré inférieur ou égal à 2 alors $x \to P(-x)$ également. Par somme $Q = \phi(P)$ est donc toujours polynomiale de degré inférieur ou égal à 2. L'application ϕ est donc bien définie. Par linéarité de l'évaluation, et rappelant que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, l'application φ est linéaire.

(2) Donner une représentation paramétrique de $\mathrm{Ker}(\varphi)$ ainsi que sa dimension.

Soit $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ la base canonique de E. Soit $P \in E$. Alors, il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $P = a\mathbf{e}_0 + b\mathbf{e}_1 + c\mathbf{e}_2$ c'est-à dire
$$P(x) = a + bx + cx^2 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$
On a $Q = \varphi(P)$ satisfait :
$$Q(x) = 2bx \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$
Par conséquent $\varphi(P) = 0 \Leftrightarrow b = 0 \Leftrightarrow P \in \mathrm{Vect}(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_2)$. D'où $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Vect}(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_2)$. La famille $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_2)$ étant libre (car sous-famille de la base canonique), $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = 2$.

(3) En déduire $\dim(\mathrm{Im}(\varphi))$.

Comme E est de dimension finie, d'après le théorème du rang, on a $\dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = \dim \mathrm{E} - \dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = 3 - 2 = 1$.

(4) Montrer que $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Vect}(\mathbf{e}_1)$ où $\mathbf{e_1}$ est définie par $\mathbf{e}_1(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

En prenant $b = 1/2$ et $a = c = 0$ à la question (1) on trouve que $\mathbf{e}_1 \in \mathrm{Im}(\varphi)$. D'où $\mathrm{Vect}(\mathbf{e}_1) \subset \mathrm{Im}(\varphi)$ et comme $\dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = \dim(\mathrm{Vect}(\mathbf{e}_1)) = 1$, on obtient $\mathrm{Vect}(\mathbf{e}_1) = \mathrm{Im}(\varphi)$.

(5) Montrer que $\mathrm{Ker}(\varphi) \oplus \mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{E}$.

Une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_2)$ et une base de $\mathrm{Im}(\varphi)$ est $\mathbf{e}_1$. La juxtaposition de ces deux bases est une base de E donc $\mathrm{Ker}(\varphi) \oplus \mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{E}$.

Exercice 2. Soit $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x) = \frac{x + 1}{x^2 + x - 6}.$$

(1) Montrer que f est intégrable.

On a $x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3) < 0$ pour tout $x \in [-1, 1]$ donc f est bien définie. De plus, f est une fraction de polynômes donc continue sur son domaine de définition et en particulier intégrable sur $[-1, 1]$.

(2) Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2+x-6}$.

Soit $x \in [-1,1]$. Cherchons $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ pour que

$$\frac{1}{(x-2)(x+3)} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+3} \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{2,-3\}.$$

En multipliant l'égalité précédente par $x-2$ et évaluant en 2, on obtient $a = \frac{1}{5}$. Par suite, on obtient $b = -\frac{1}{5}$. Donc

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2+x-6} = \frac{1}{5}\left[\ln\left|\frac{x-2}{x+3}\right|\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{5}\left(\ln\left(\frac{1}{4}\right) - \ln\left(\frac{3}{2}\right)\right) = -\frac{\ln(6)}{5}.$$

(3) En déduire $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)dx$.

On a

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} f(x)dx &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{2x+1}{x^2+x-6}dx + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2+x-6} \\ &= \frac{1}{2}\left[\ln\left|x^2+x-6\right|\right]_{-1}^{1} - \frac{\ln(6)}{10} = \frac{1}{2}(\ln(4)-\ln(6)) - \frac{\ln(6)}{10} \\ &= -\frac{1}{5}\ln(\frac{27}{4}).\end{aligned}$$

Exercice 3. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1-x)+x}{x^2} & \text{si } x < 0 \\ e^{ax} + b & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

Donner les valeurs de a et b pour lesquelles la fonction f est

(1) bien définie.

Pour tout $x < 0$, on a $1 - x > 0$ donc le terme logarithmique est bien défini. De plus, il n'y a pas de division par 0 lorsque $x < 0$. D'où f est bien définie pour tout $a, b \in \mathbb{R}$.

(2) continue.

La fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ comme composée de fonctions qui le sont. Il reste à vérifier la régularité en 0. On a

$$\frac{\ln(1-x)+x}{x^2} = \frac{-x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) + x}{x^2} = -\frac{1}{2} + o(1).$$

Donc $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-x)+x}{x^2} = -\frac{1}{2}$. Ainsi, $f(0) = \lim\limits_{x\to 0,\ x<0} f(x) \Leftrightarrow 1 + b = -\frac{1}{2}$. D'où, f est continue si et seulement si $a \in \mathbb{R}$ et $b = -\frac{3}{2}$.

(2) dérivable.

Pour que f soit dérivable, f doit être continue donc on peut fixer $b = -\frac{3}{2}$. De plus, si $x > 0$, on a

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{e^{ax} - 1}{x} = \frac{1 + ax + o(x) - 1}{x} = a + o(1).$$

Et si $x < 0$, on a

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\ln(1 - x) + x + \frac{x^2}{2}}{x^3} = -\frac{1}{3} + o(1).$$

Ainsi, $\lim\limits_{x \to 0,\ x>0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = a$ et $\lim\limits_{x \to 0,\ x<0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = -\frac{1}{3}$. D'où f est dérivable si et seulement si $a = -\frac{1}{3}$ et $b = -\frac{3}{2}$.