Examen - HLMA206

Session 2 - 27/06/2019

Le sujet est composé de 6 questions préliminaires et 3 exercices indépendants. Il est possible d'admettre et d'utiliser des résultats de l'énoncé pour répondre aux questions suivantes. Tout document et matériel électronique interdit. Il sera tenu compte de la clarté et de la précision de la rédaction.

Durée : 3 heures.

Questions préliminaires. Pour répondre aux questions **Q1** à **Q6** suivantes (et uniquement pour ces questions), il n'est pas demandé de justifier. Pour les questions **Q1**, **Q2**, **Q4** et **Q5**, des réponses sont proposées. Plusieurs d'entre elles peuvent être correctes.

Q1. Soit $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ t.q. $x + y + z + t = x - y + z - t = 0\}$ et $F = \{\lambda(1, 0, 1, 0), \lambda \in \mathbb{R}\}$
Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies :

a) E et F sont en somme directe — *b*) $E \cap F = \{0\}$

c) E et F sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$ — *d*) $E + F = \mathbb{R}^4$.

Q2. Soit la famille vecteurs $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ avec :

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies :

a) La famille $\mathcal{E}$ est libre — *b*) La famille $\mathcal{E}$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$

c)La famille $\mathcal{E}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ — *d*) $\langle \mathcal{E} \rangle = \mathbb{R}^3$

Q3. Pour quelles valeurs des coefficients $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ a-t-on que :

$$E_{a,b,c} := \left\{ f \in C([-1, 1]) \text{ t.q. } \quad af(x)^2 + bf(x) + c = 0 \quad \forall\, x \in [-1, 1] \right\}$$

est un espace vectoriel ?

Q4. Parmi les suites (x_k) suivantes, laquelle est une subdivision de $[0, 1]$

a)$x_k = k,\ k \in \mathbb{N}$ — *b*)$x_k = 1/2^k,\ k \in \mathbb{N}$

c)$x_k = \dfrac{k}{10},\ k = 0, \ldots, 10.$ — *d*), $x_k = \pi^k,\ k = 0, 1, 2.$

Q5. Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$. On suppose que f est simultanément continue sur $[0, 1]$ et en escalier. Que peut-on dire de f à coup sûr :

a)$f(x) = 0$ pour tout $x \in [0, 1]$ — *b*) f est polynomiale

c)f est constante — *d*) $f(x) = x$ pour tout $x \in [0, 1]$

Q6. Calculer le développement limité à l'ordre 5 en 0 de $f(x) = \ln(x^2 + \sqrt{1 - x^2})$.

Tourner la page $\longrightarrow$

Exercice 1. Soit $E = \mathbb{R}_2[x]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions polynômiales de degré inférieur ou égal à 2. On définit $\varphi : E \to E$ telle que, pour tout $P \in E$ la fonction $Q = \varphi(P)$ est définie par

$$Q(x) = P(x) - P(-x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

(1) Montrer que φ est bien définie et linéaire.

(2) Donner une représentation paramétrique de $\mathrm{Ker}(\varphi)$ ainsi que sa dimension.

(3) En déduire $\dim(\mathrm{Im}(\varphi))$.

(4) Montrer que $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Vect}(\mathbf{e}_1)$ où $\mathbf{e_1}$ est définie par $\mathbf{e}_1(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(5) Montrer que $\mathrm{Ker}(\varphi) \oplus \mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{E}$.

Exercice 2. Soit $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2 + x - 6}.$$

(1) Montrer que f est intégrable.

(2) Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2 + x - 6}$.

(3) En déduire $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)dx$.

Exercice 3. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1-x) + x}{x^2} & \text{si } x < 0 \\ e^{ax} + b & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

Donner les valeurs de a et b pour lesquelles la fonction f est

(1) bien définie.

(2) continue.

(3) dérivable.