Examen - HLMA206

13/04/2019

Le sujet est composé de 6 exercices. Il est possible d'admettre et d'utiliser des résultats de l'énoncé pour répondre aux questions suivantes. Tout document et matériel électronique interdit. Il sera tenu compte de la clarté et de la précision de la rédaction.

Durée : 3 heures.

Exercice 1. [sur 6 point(s)] Soit $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On note $F = \{M \in E \text{ t.q. } AM = M\}$ et $G = \{M - AM,\ M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\}$.
On admet que G est un sous-espace vectoriel de E.

Puisque $A^2 = \mathbb{I}_2$ on remarque que l'on peut réécrire

$$G = \{M \in E \text{ t.q. } AM = -M\}.$$

(1) [sur 1pt point(s)] Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

Soit $\Phi : E \to E$ définie par $\Phi(M) = AM - M$. Alors Φ est linéaire (par linéarité du produit à gauche par la matrice A) et, par définition $F = \operatorname{Ker}\Phi$ donc F est un sous-espace vectoriel de M.

(2) [sur 2,5 point(s)] Donner une base de F.

On remarque que AM est la matrice obtenue en echangeant les positions des lignes [sur 0,5 point(s)] de M donc

$$(AM = M) \Leftrightarrow \text{ les deux lignes de } M \text{ sont égales .}$$

Par conséquent, une base [sur 1 point(s)] de M est

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$ [sur 1 point(s)]

(elle est génératrice par l'argument ci-dessus et libre car les deux matrices ont des coefficients alternativement nulle et non nulle)

(3) [sur 2,5 point(s)] Montrer que F et G sont supplémentaires dans E.
Indication : On pourra écrire que toute matrice $M \in E$ s'écrit :

$$M = \frac{M + AM}{2} + \frac{M - AM}{2}.$$

On montre que $F \cap G = \{0_E\}$ et $F + G = E$.

$F \cap G = \{0_E\}$.[sur 1 point(s)] Il suffit de montrer que toute matrice M de $F \cap G$ est nécessairement nulle. Si $M \in F \cap G$ alors on a $M = AM$ et par la caractérisation de G en préambule $AM = -M$. Donc $M = -M$ et $M = 0_E$

$F + G = E$.[sur 1,5 point(s)] Il suffit de montrer que toute matrice M de E s'écrit sous la forme $M_1 + M_2$ avec $M_1 \in F$ et $M_2 \in G$. D'après lénoncé on peut écrire $M = M_1 + M_2$ avec

$$M_1 = \frac{M + AM}{2} \qquad M_2 = \frac{M - AM}{2}.$$

On remarque alors que

$$AM_1 = \frac{AM + A^2M}{2} = \frac{AM + M}{2} = M_1 \text{ donc } M_1 \in F$$

et

$$AM_2 = \frac{AM - A^2M}{2} = \frac{AM - M}{2} = M_2 \text{ dnc } M_2 \in G.$$

Ceci termine la preuve.

Exercice 2. [sur 6 point(s)]Dans cet exercice, on note $E(x)$ la partie entière de $x \in \mathbb{R}$. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = (x - E(x))^2 + E(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

(1) [sur 2,5 point(s)] Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Il s'agit de démontrer que f est continue en tout $x_0 \in \mathbb{R}$. On distingue le cas $x \in \mathbb{Z}$ du cas $x \in \mathbb{R} \setminus Z$. [sur 0,5 point(s)]

Si $x_0 \notin \mathbb{Z}$,[sur 1 point(s)] alors on a $x_0 \in]q, q+1[$ avec $q = E(x)$. Donc, sur $]q, q+1[$ on a $f(x) = (x - q)^2 + q$ qui est continue par polynomiale. Par conséquent est f est continue sur $]q, q+1[$ et donc en x_0.

Si $x_0 = q \in \mathbb{Z}$[sur 1pt point(s)] alors

$$\lim_{\substack{x \to q \\ x < q}} = \lim_{x \to q} (x - (q-1)^2) + (q-1) = q$$

et

$$\lim_{\substack{x \to q \\ x > q}} = \lim_{x \to q} (x - q^2) + q = q = f(q)$$

Donc f est continue en q.

(2) [sur 0,5 point(s)] En déduire que la fonction $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \int_{\sqrt{2}}^{x} f(t)dt \quad \forall\, x \in \mathbb{R},$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Par un résultat du cours, puisque f est continue sur $\mathbb{R}$ alors F est bien continue dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée f.

(3) [sur 3 point(s)] Donner le développement limité en 0 à l'ordre 1 de F.

Comme F est continue dérivable en 0 le DL de F en 0 à l'ordre 1 est

$$F(x) = F(0) + F'(0)x + o(x)$$ [sur 1pt point(s)]

Or $F'(0) = f(0) = 0$ [sur 0,5 point(s)]et

$$F(0) = \int_{\sqrt{2}}^{0} f(t)\mathrm{d}t = -\int_{0}^{\sqrt{2}} f(t)\mathrm{d}t.$$

Comme $\sqrt{2} \in [1, 2]$, on a

$$\begin{aligned} F(0) &= -\int_{0}^{1} f(t)\mathrm{d}t - \int_{1}^{\sqrt{2}} f(t)\mathrm{d}t \\ &= -\int_{0}^{1} t^2\mathrm{d}t - \int_{1}^{\sqrt{2}} ((t-1)^2 + 1)\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{3} - \left(\frac{(\sqrt{2}-1)^3}{3} + \sqrt{2} - 1\right) = 3 - \frac{8\sqrt{2}}{3}. \end{aligned}$$

[sur 1,5 point(s)]

Exercice 3. [sur 3 point(s)]Soit $\hat{\mathcal{E}}$ la famille de vecteurs contenant les vecteurs :

$$\hat{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

et $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linéaire définie par

$$\phi(x, y, z) = (2x - 2y, x - y, x - z) \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

(1) [sur 1 point(s)] Montrer que $\hat{\mathcal{E}}$ est une base de $\mathbb{R}^3$

La matrice de $\hat{\mathcal{E}}$ dans la base canonique est

$$Mat_{\mathcal{E}}(\hat{\mathcal{E}}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dont le déterminant est $-1 \neq 0$. Donce $\hat{\mathcal{E}}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(2) [sur 2 point(s)] Calculer la matrice de ϕ dans la base $\hat{\mathcal{E}}$.

Après calcul, on remarque que

$$\phi(\hat{e}_1) = 0\,\hat{e}_1 + 0\,\hat{e}_2 + 0\,\hat{e}_3$$
$$\phi(\hat{e}_2) = \hat{e}_1 - \hat{e}_2$$
$$\phi(\hat{e}_3) = \hat{e}_1 + \hat{e}_3.$$

Donc la matrice de ϕ dans la base $\hat{\mathcal{E}}$ est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 4. [sur 5+1 point(s)] Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1/(2+\cos(x))$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(1) [sur 2 point(s)] Justifier que f est intégrable sur $[0, 2\pi/3]$.

On remarque que $2 + \cos(x) \neq 0$ [sur 0,5 point(s)] pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par les règles usuelles sur les opérations de fonctions continues, on a donc que f est continue sur $\mathbb{R}$ et donc sur $[0, 2\pi/3]$ [sur +1 point(s)]. Par un résultat du cours, on a donc que f est intégrable sur $[0, 2\pi/3]$ [sur 0,5 point(s)].

(2) [sur 3+1 point(s)] Calculer

$$I = \int_0^{2\pi/3} \frac{dx}{2+\cos(x)}.$$

On applique le changement de variable $t(x) = \tan(x/2)$. On rappelle que cette fonction est C^1 sur $[0, 2\pi/3]$ avec $t'(x) = 1/2(1 + \tan^2(x/2))$ qui ne s'annule pas. La fonction t réalise donc un C^1-difféomorphisme strictement croissant de $[0, 2\pi/3]$ sur $[\tan(0), \tan(\pi/3)] = [0, \sqrt{3}]$ [sur 1 point(s)] De plus, on sait (formules vues en cours) que $\cos(x) = (1 - t(x)^2)/(1 + t(x)^2)$. Par changement de variable, on a donc que

$$I = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{2+\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} \frac{2dt}{1+t^2} = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{2dt}{3+t^2}. \quad \text{[sur 1,5 point(s)]}$$

Par suite, on a (puisque $\arctan(1) = \pi/4$)

$$I = 2\left[\frac{1}{\sqrt{3}} \arctan(\frac{t}{\sqrt{3}})\right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan(1) = \frac{\pi\sqrt{3}}{6}. \quad \text{[sur 1,5pt point(s)]}$$

Exercice 5. [sur 4 point(s)]Soit

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad \forall\, x \in]-1, 1[.$$

(1) [sur 1,5 point(s)] Justifier que f admet une formule de Taylor à l'ordre 3 en tout $a \in]-1, 1[$.

La fonction $x \mapsto (1+x)/(1-x)$ est une fraction de polynomes dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]-1, 1[$, elle est donc C^∞ sur $]-1, 1[$. La fonction arctan est C^∞ sur $\mathbb{R}$. Par composition, f est donc C^∞ sur $]-1, 1[$. Elle est donc en particulier C^3 [sur 1 point(s)] sur $]-1, 1[$ et admet une formule de Taylor en tout $a \in]-1, 1[$ à l'ordre 3. [sur 0,5 point(s)]

(2) [sur 2,5 point(s)]Calculer la formule de Taylor-Young de la fonction f en $a = 0$ à l'ordre 3.

On sait que la formule de Taylor-Young correspond au DL quand elle existe. On propose donc de calculer le DL. On a $f(0) = \arctan(1) = \pi/4$. Ensuite, comme f est dérivable sur $]-1, 1[$, on peut calculer

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Par conséquent, on a, à l'ordre 2 en 0 :

$$f'(x) = 1 - x^2 + o(x^2)$$

et, comme f est la primitive de f' qui vaut $\pi/4$ en 0 :

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

qui est le DL en 0 à l'ordre 3 de f et donc la formule de Taylor-Young correspondante.

Exercice 6. [sur 3 point(s)] Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) [sur 2 point(s)] Calculer $\det A$ et en déduire $\det B$.

On trouve par un calcul direct $\det A = 2$ [sur 0,5 point(s)]. On remarque alors qu'en développant $\det B$ par rapport à la troisième colonne [sur 1 point(s)], on a $\det B = \det A = 2$ [sur 0,5 point(s)].

(2) [sur 1 point(s)] La matrice A est-elle inversible ?

On a $\det A \neq 0$ donc A est inversible.