Examen - HLMA206

13/04/2019

Le sujet est composé de 6 exercices. Il est possible d'admettre et d'utiliser des résultats de l'énoncé pour répondre aux questions suivantes. Tout document et matériel électronique interdit. Il sera tenu compte de la clarté et de la précision de la rédaction.

Durée : 3 heures.

Exercice 1. Soit $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On note $F = \{M \in E \text{ t.q. } AM = M\}$ et $G = \{M - AM,\ M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\}$.
On admet que G est un sous-espace vectoriel de E.

(1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

(2) Donner une base de F.

(3) Montrer que F et G sont supplémentaires dans E.
Indication : On pourra écrire que toute matrice $M \in E$ s'écrit :

$$M = \frac{M + AM}{2} + \frac{M - AM}{2}.$$

Exercice 2. Dans cet exercice, on note $E(x)$ la partie entière de $x \in \mathbb{R}$. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = (x - E(x))^2 + E(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

(1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

(2) En déduire que la fonction $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \int_{\sqrt{2}}^{x} f(t)dt \quad \forall\, x \in \mathbb{R},$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$.

(3) Donner le développement limité en 0 à l'ordre 1 de F.

Exercice 3. Soit $\hat{\mathcal{E}}$ la famille de vecteurs contenant les vecteurs :

$$\hat{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

et $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linéaire définie par

$$\phi(x, y, z) = (2x - 2y, x - y, x - z) \quad \forall\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

(1) Montrer que $\hat{E}$ est une base de $\mathbb{R}^3$

(2) Calculer la matrice de ϕ dans la base $\hat{\mathcal{E}}$.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1/(2+\cos(x))$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(1) Justifier que f est intégrable sur $[0, 2\pi/3]$.

(2) Calculer

$$I = \int_0^{2\pi/3} \frac{dx}{2+\cos(x)}.$$

Exercice 5. Soit

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad \forall\, x \in]-1,1[.$$

(1) Justifier que f admet une formule de Taylor à l'ordre 3 en tout $a \in]-1,1[$.

(2) Calculer la formule de Taylor-Young de la fonction f en $a = 0$ à l'ordre 3.

Exercice 6. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) Calculer $\det A$ et en déduire $\det B$.

(2) La matrice A est-elle inversible ?