CC1 - HLMA206 - 15/03/2019

ALGÈBRE LINÉAIRE

Le sujet est composé de cinq exercices. Il est possible d'admettre et d'utiliser des résultats de l'énoncé pour répondre aux questions suivantes. Tout document et matériel électronique interdit. Il sera tenu compte de la clarté et de la précision de la rédaction.

Durée : 63 minutes.

Exercice 1. [sur 10 point(s)] Soit ϕ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) [sur 2 point(s)] Calculer $\chi(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{I}_4)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$

On a

$$A - \lambda \mathbb{I}_4 = \begin{pmatrix} -2-\lambda & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -\lambda \end{pmatrix}$$

En dédveloppant par rapport à la deuxième colonne, on trouver donc :

$$\chi(\lambda) = (1-\lambda) \begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -2 & -\lambda \end{vmatrix}$$

avec

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = (2+\lambda)(1-\lambda)\lambda + (1-\lambda) = (1-\lambda)((2+\lambda)\lambda + 1).$$

Finalement

$$\chi(\lambda) = (1-\lambda)^2 * (\lambda^2 + 2\lambda + 1) = (1-\lambda)^2(1+\lambda)^2.$$

(2) [sur 1 pt point(s)] En déduire que $E_+ = \mathrm{Ker}(A - \mathbb{I}_4)$ et $E_- = \mathrm{Ker}(A + \mathbb{I}_4)$ ne sont pas réduits à $\{0_{\mathbb{R}^4}\}$.

Avec les calculs précédents on obtient que $\chi(1) = \chi(-1) = 0$. En particulier $\det(A - \mathbb{I}_4) = \det(A + \mathbb{I}_4) = 0$ et les matrices $A - \mathbb{I}_4$ et $A + \mathbb{I}_4$ ne sont pas inversibles donc pas injectives, c'est-à dire que leur noyaux ne sont pas réduits à $\{0_{\mathbb{R}^4}\}$.

(3) [sur 1pt point(s)] Montrer que E_+ et E_- sont en somme directe.

Il s'agit de montrer que $E_+ \cap E_- = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$. Soit $\mathbf{x} \in E_+ \cap E_-$. On a donc $\mathbf{x} \in E_+$ c'est-à dire que $\mathbf{x} \in \mathrm{Ker}(- + \mathbb{I}_4)$ et donc que $A\mathbf{x} - \mathbf{x} = 0_{\mathbb{R}^4}$. Autrement dit $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$. En procédant de manière identique avec la condition $\mathbf{x} \in E_-$ on obtient que $A\mathbf{x} = -\mathbf{x}$. Finalement on a que

$$A\mathbf{x} = \mathbf{x} = -\mathbf{x}.$$

Donc $\mathbf{x} = 0_{\mathbb{R}^4}$ et $E_+ \cap E_- = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$

(4) [sur 2pt point(s)] Déterminer une base $\mathcal{E}_+$ de E_+

Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$. On a que $\mathbf{x} \in E_+$ si et seulement si ses composantes (x, y, z, t) est une solution du système homogène de matrice de coefficients

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

On résoud ce système en appliquant l'algorithme de Gauss et on obtient l'ensemble solution

$$\{(-t, y, -t, t), \quad (y, t) \in \mathbb{R}\}.$$

Par conséquent, on obtient que

$$E_+ = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

et une base $\mathcal{E}_+$ est formée par les deux vecteurs de cette famille qui engendre E_+.

(5) [sur 1pt point(s)] Montrer que

$$\mathcal{E}_- = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

est une base de E_-

Par le calcul on montrer que ces deux vecteurs sont des vecteurs de E_-. De plus, ils sont non proportionnels (leurs deuxièmes et troisièmes composantes sont alternativement nulle et non nulle) donc il forme une famille libre de E_-. Or E_- est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ en somme directe avec E_+. Comme E_+ est de dimension 2, on a

$$2 + \dim E_- = \dim E_- + \dim E_+ = \dim E_- \oplus E_+ \leq 4$$

Ainsi $\dim E_- \leq 2$. La famille $\mathcal{E}_-$ étant libre $\dim E_- \geq 2$. Finalement $\dim E_- = 2$ et $\mathcal{E}_-$ est non seulement libre mais également une base de E_-.

(6) [sur 2pt point(s)] Montrer que la famille $\mathcal{E}$ rassemblant les vecteurs de $\mathcal{E}_+$ et $\mathcal{E}_-$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

On sait que E_+ et E_- sont en somme directe. De plus, d'après les réponses aux questions (4) et (5) on obtient qu'ils sont tous deux de dimension 2. Donc $\dim E_+ + \dim E_- = \dim \mathbb{R}^4$. En conclusion ils E_+ et E_- sont en somme directe. On obtient donc une base en construisant la famille qui contient d'abord les vecteurs de $\mathcal{E}_+$ puis les vecteurs de $\mathcal{E}_-$.

(7) [sur 1pt point(s)] Déterminer la matrice de ϕ dans la base $\mathcal{E}$.

Par construction de $\mathcal{E}_+$ on a que pour $\mathbf{e} \in \mathcal{E}_+ : A\mathbf{e} = \mathbf{e}$. De même, pour $\mathbf{e} \in \mathcal{E}_-$ on a $A\mathbf{e} = -\mathbf{e}$. Par conséquent, comme $\mathcal{E}$ contient d'abord les vecteurs de $\mathcal{E}_+$ puis ceus de $\mathcal{E}_-$ on obtient :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E} \to \mathcal{E}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2. [sur 3 point(s)]

(1) [sur 1,5 point(s)] Soit $x_0 = 0, x_1 = 1/3, x_2 = 4/3, x_3 = 2$. Construire une fonction en escalier f qui ne s'annule pas telle que (x_0, x_1, x_2, x_3) est une subdivision adaptée à f.

On propose $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ donnée par la formule

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in [0, 1/3] \\ 1 & \text{si } x \in]1/3, 4/3[\\ 2 & \text{si } x \in [4/3, 2] \end{cases}$$

(2) [sur 1,5 point(s)] Soit $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \arctan(E(3x/2))$ pour $x \in [-1, 1]$. Montrer que f est en escalier et préciser une subdivision adaptée.

On montrer qu'une subdivision adaptée est $x_0 = -1, x_1 = -2/3, x_2 = 0, x_3 = 2/3, x_4 = 1$. En effet,
- si $x \in [x_0, x_1[$ alors $-2 \leq -3/2 \leq 3x/2 < -1$ et $E(3x/2) = -2$ donc $f(x) = \arctan(-2)$
- si $x \in [x_1, x_2[$ alors $-1 \leq 3x/2 < 0$ et $E(3x/2) = -1$ donc $f(x) = \arctan(-1) = -\pi/4$,
- si $x \in [x_2, x_3[$ alors $0 \leq 3x/2 < 1$ et $E(3x/2) = 0$ donc $f(x) = \arctan(0) = 0$
- si $x \in [x_3, x_4]$ alors $1 \leq 3x/2 \leq 3/2 < 2$ et $E(3x/2) = 1$ donc $f(x) = \arctan(1) = \pi/4$.

Exercice 3. [sur 7 point(s)] Soit
$$f(x) = \frac{x^3 + 4x^2 - x}{(x^4 - 1)}$$

(1) [sur 2 point(s)] Déterminer une primitive de $g(x) = (x + 2)/(x^2 + 1)$ sur $\mathbb{R}$.

Comme le dénominateur de g ne s'annule pas, la fraciton g est continue sur $\mathbb{R}$, donc on peut en chercher une primitive sur $\mathbb{R}$. La question est bien posée. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :
$$g(x) = \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2 + 1} + 2\frac{1}{x^2 + 1}.$$
Par conséquent
$$\int g(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \frac{2t}{t^2 + 1}\mathrm{d}t + 2\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2 + 1}.$$
On reconnaît dans la deuxième primitive la dérivée de l'arctangente et dans la première primitive une fonction de la forme u'/u avec $u(x) = x^2 + 1$. Par changement de variable on obtient donc :
$$\int g(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln(x^2 + 1) + 2\arctan(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

(2) [sur 1 point(s)] Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(x) = a/(x - 1) + b/(x + 1) + (x + 2)/(x^2 + 1)$

Pour toute valeur de a et b on a, en mettant au même dénominateur
$$\begin{aligned}\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{x+2}{x^2+1} &= \frac{a(x+1)(x^2+1) + b(x-1)(x^2+1) + (x+2)(x-1)(x+1)}{(x^2+1)(x-1)(x+1)}\\ &= \frac{a(x^3 + x^2 + x + 1) + b(x^3 - x^2 + x - 1) + (x^3 + 2x^2 - x - 2)}{x^4 - 1}\\ &= \frac{(a + b + 1)x^3 + (a - b + 2)x^2 + (a + b - 1)x + (a - b - 2)}{x^4 - 1}\end{aligned}$$
Pour avoir l'identité voulue, il faut et suffit que
$$(a + b + 1)x^3 + (a - b + 2)x^2 + (a + b - 1)x + (a - b - 2) = x^3 + 4x^2 - x \quad \forall\, x \neq 1, -1$$
et donc
$$a + b + 1 = 1 \quad a - b + 2 = 4 \quad a + b - 1 = -1 \quad a - b - 2 = 0$$
On remarque que $a = 1$ et $b = -1$ est l'unique paire qui satisfait toutes ces identités.

(3) [sur 1 point(s)] En déduire que f admet une primitive sur $]-\infty, -1[$, sur $]-1, 1[$ et sur $]1, +\infty[$

Sous l'écriture
$$f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{b}{x+1} + \frac{x+2}{x^2+1}$$
on remarque que f est définie continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Par un théorème de cours elle admet donc des primitives sur chacun des intervalles qui compose cet ensemble, c'est-à-dire $]-\infty, -1[,]-1, 1[$ et $]1, \infty[$.

(4) [sur 2 point(s)] Déterminer une primitive de f sur chacun de ces intervalles.

En appliquant le calcul de la question 1. et en utilisant la primitive connu de $1/(x-1)$ et $1/(x+1)$ on trouve que sur chacun des intervalles donné, une primitive de f est donnée par la formule

$$\int f(t)\mathrm{d}t = \ln(|x-1|) - \ln(|x+1|) + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + 2\arctan(x).$$

On note $F_{ref}(x)$ l'expression au membre de droite de cette identité dans ce qui suit.

(5) [sur 1 point(s)] Donner toutes les fonctions F dérivables sur $]-\infty,-1[\cup]-1,1[\cup]1,\infty[$ et telles que $F' = f$.

Suppososn F satisfaisant la propriété voulue. Comme F_{ref} satisfait (par définition d'une primitve) $F'_{ref}(x) = f(x)$ sur $]-\infty, ?1[$, on sait par un théorème de cours, que sur chacun de ces intervalles il existe une constante C_- telle que $F(x) = F_{ref}(x) + C_-$ pour tout $x \in]-\infty, ?1[$. De même, on construit des constantes C_0 et C_+ telles que

$$\begin{aligned} F(x) &= F_{ref}(x) + C_0 && \forall\, x \in]-1,1[\\ F(x) &= F_{ref}(x) + C_+ && \forall\, x \in]1,\infty[. \end{aligned}$$

En conclusion, il existe donc 3 constantes réelles C_-, C_0, C_+ telles que

$$F(x) = \begin{cases} F_{ref}(x) + C_- & \forall\, x \in]-\infty,-1[\\ F_{ref}(x) + C_0 & \forall\, x \in]-1,1[\\ F_{ref}(x) + C_+ & \forall\, x \in]1,\infty[. \end{cases}$$

La reciproque étant immediate, on a là toutes les fonctions F recherchées.

Exercice 4. [sur 2 point(s)] Calculer

$$I = \int_0^{\pi} (\cos(t))^2 \mathrm{d}t.$$

D'après les formules de duplication du cosinus, on a :

$$(\cos(t))^2 = \frac{\cos(2t)+1}{2}, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Donc

$$I = \int_0^{\pi} \frac{\cos(2t)+1}{2}\mathrm{d}t = \left[\frac{\sin(2t)}{4} + \frac{t}{2}\right] = \frac{\pi}{2}.$$