CC2 - HLMA206 - 12/04/2019

Le sujet est composé de quatre exercices. Il est possible d'admettre et d'utiliser des résultats de l'énoncé pour répondre aux questions suivantes. Tout document et matériel électronique interdit. Il sera tenu compte de la clarté et de la précision de la rédaction.

Durée : 65 minutes.

Exercice 1. Soit ϕ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) Calculer $\chi(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{I}_4)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

(2) En déduire que $E_+ = \mathrm{Ker}(A - \mathbb{I}_4)$ et $E_- = \mathrm{Ker}(A + \mathbb{I}_4)$ ne sont pas réduits à $\{0_{\mathbb{R}^4}\}$.

(3) Montrer que E_+ et E_- sont en somme directe.

(4) Déterminer une base $\mathcal{E}_+$ de E_+.

(5) Montrer que

$$\mathcal{E}_- = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

est une base de E_-.

(6) Montrer que la famille $\mathcal{E}$ rassemblant les vecteurs de $\mathcal{E}_+$ et $\mathcal{E}_-$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

(7) Déterminer la matrice de ϕ dans la base $\mathcal{E}$.

Exercice 2.

(1) Soit $x_0 = 0, x_1 = 1/3, x_2 = 4/3, x_3 = 2$. Construire une fonction en escalier f qui ne s'annule pas telle que (x_0, x_1, x_2, x_3) est une subdivision adaptée à f.

(2) Soit $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \arctan(E(3x/2))$ pour $x \in [-1, 1]$. Montrer que f est en escalier et préciser une subdivision adaptée.

Remarque : On note $E(t)$ pour la partie entière du réel t, c'est-à dire le plus grand entier relatif inférieur ou égal à t.

Exercice 3. Soit

$$f(x) = \frac{x^3 + 4x^2 - x}{(x^4 - 1)}$$

(1) Déterminer une primitive de $g(x) = (x + 2)/(x^2 + 1)$ sur $\mathbb{R}$.

(2) Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(x) = a/(x - 1) + b/(x + 1) + (x + 2)/(x^2 + 1)$ sur $\mathbb{R}$.

(3) En déduire que f admet une primitive sur $]-\infty, -1[$, sur $]-1, 1[$ et sur $]1, +\infty[$.

(4) Déterminer une primitive de f sur chacun de ces intervalles.
Indication : On pourra exprimer ces primitives en fonction de a et b s'ils n'ont pu être calculés à la première question.

(5) Donner toutes les fonctions F dérivables sur $]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, \infty[$ et telles que $F' = f$.

Exercice 4. Calculer

$$I = \int_0^{\pi} (\cos(t))^2 \mathrm{d}t.$$