# CC1 - HLMA206 - 15/03/2019

## Algèbre linéaire

*Le sujet est composé de six exercices. Il est possible d'admettre et d'utiliser des résultats de l'énoncé pour répondre aux questions suivantes. Tout document et matériel électronique interdit. Il sera tenu compte de la clarté et de la précision de la rédaction.*

*Durée : 63 minutes.*

---

**Exercice 1.** [sur 2 point(s)] Soit $E$ et $\hat{E}$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On se donne $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ une famille de vecteurs de $E$ et $\phi : E \to \hat{E}$ une application linéaire. Montrer l'implication :

$$(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \text{ est une famille liée} \implies (\phi(\mathbf{e}_1), \ldots, \phi(\mathbf{e}_n)) \text{ est une famille liée.}$$

Supposons que $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ est une famille liée. Alors, il existe une RDL $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ non globalement nulle telle que

$$\alpha_1 \mathbf{e}_1 + \ldots + \alpha_n \mathbf{e}_n = 0_E.$$

Alors

$$\phi(\alpha_1 \mathbf{e}_1 + \ldots + \alpha_n \mathbf{e}_n) = \phi(0_E) = 0_{\hat{E}}.$$

Or par linéarité, on a $\phi(\alpha_1 \mathbf{e}_1 + \ldots + \alpha_n \mathbf{e}_n) = \alpha_1 \phi(\mathbf{e}_1) + \ldots + \alpha_n \phi(\mathbf{e}_n)$ et

$$\alpha_1 \phi(\mathbf{e}_1) + \ldots + \alpha_n \phi(\mathbf{e}_n) = 0_{\hat{E}}.$$

Par conséquent, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ est également une RDL de $(\phi(\mathbf{e}_1), \ldots, \phi(\mathbf{e}_n))$ non globalement nulle. Par conséquent $(\phi(\mathbf{e}_1), \ldots, \phi(\mathbf{e}_n))$ est également liée.

**Exercice 2.** [sur 4 point(s)] Soit $\mathcal{D}_3(\mathbb{R}) = \{M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 3} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \text{ t.q. } m_{i,j} = 0 \quad \forall\, i \neq j\}$.

(1) [sur 2 point(s)] Montrer que $\mathcal{D}_3(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Posons

$$\begin{aligned} \Phi : \quad \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}) \\ M &\longmapsto \begin{pmatrix} m_{1,2} & m_{1,3} \\ m_{2,1} & m_{2,3} \\ m_{3,1} & m_{3,2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Alors $\Phi$ est linéaire et $\operatorname{Ker}\Phi = \mathcal{D}_3(\mathbb{R})$. Donc $\mathcal{D}_3(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

(2) [sur 2 point(s)] Expliciter une base de $\mathcal{D}_3(\mathbb{R})$ et en déduire la dimension de cet espace vectoriel.

$M \in \mathcal{D}_3(\mathbb{R})$ si et seulement si, en composante, on a

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 \\ 0 & 0 & m_{33} \end{pmatrix} = m_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + m_{2,2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + m_{33} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Par conséquence,

$$\mathcal{D}_3(\mathbb{R}) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

De plus, la famille génératrice au membre de droite de cette identité est libre car les coefficients diagonaux des matrices la composant sont alternativement nuls et égaux à 1. C'est donc une base de $\mathcal{D}_3(\mathbb{R})$ qui est alors de dimension 3.

**Exercice 3.** [sur 4 point(s)] Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les sous-espaces vectoriels

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } x + y + z = 0\} \qquad F = \langle (1, 1, 1) \rangle.$$

(1) [sur 1,5 point(s)] Calculer $E \cap F$.

On sait que $\{0_{\mathbb{R}^3}\} \subset E \cap F$. On veut montrer l'inclusion réciproque. Soit $(x, y, z) \in E \cap F$. On a donc d'une part $(x, y, z) \in F$ et il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $x = y = z = t$. D'autre part, on a $(x, y, z) \in E$ donc $x+y+z = 0$. Or $x+y+z = 3t$. Ceci implique donc $3t = 0$ et $t = 0$ et donc $x = y = z = 0$. On a donc finalement bien $E \cap F = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

(2) [sur 2,5 point(s)] Les espaces $E$ et $F$ sont-ils supplémentaires ?

Comme $E$ et $F$ sont en somme directe, il est suffisant de montrer que la somme de leur dimension est 3 pour obtenir qu'ils sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$. Clairement $F$ est dedimension 1. Pour ce qui est de $E$ on peut le réécrire :

$$E = \{(-(y+z), y, z)), (y, z) \in \mathbb{R}^2\} = \langle(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\rangle.$$

Donc une base de $E$ est $((-1, 1, 0), (-1, 0, 1))$ qui est alors de dimension 2. Les dimension étant compatibles, on a que $E$ et $F$ sont supplémentaires.

**Exercice 4.** [sur 3 point(s)] Dans cet exercice on note $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et

$$\begin{array}{rccc} \phi : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{array}$$

ainsi que $\mathbf{u}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3$, $\mathbf{u_2} = \mathbf{e_1} + \mathbf{e_2}$, $\mathbf{u}_3 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$.

(1) [sur 1,5 point(s)] Montrer que la famille $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u_3})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Notons $\mathcal{U}$ cette nouvelle famille de vecteurs et $\mathcal{E}$ la base canonique. On a donc

$$P = Mat_{\mathcal{E}}(\mathcal{U}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On peut alors calculer que $\det(P) = 1$ et donc $\mathcal{U}$ est bien une base de $\mathbb{R}^3$. Cependant, on peut également remarquer qu'à la seconde question, on va devoir calculer $P^{-1}$. On peut donc d'ores-et-déjà appliquer l'algorithme de Gauss-Jordan pour obtenir que $P$ est inversible et

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) [sur 1,5 point(s)] Exprimer la matrice de $\phi$ dans la base $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u_3})$.

Par la formule du changement de base du cours, on trouve que

$$Mat_{\mathcal{U}\to\mathcal{U}}(\phi) = P^{-1} Mat_{\mathcal{E}\to\mathcal{E}} P$$

Avec les calculs ci-dessus, on obtient que

$$Mat_{\mathcal{U}\to\mathcal{U}}(\phi) = P^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

s

**Exercice 5.** [sur 4 point(s)] Dans cet exercice, on note :

$$\begin{array}{rccc} \phi : & \mathbb{R}_2[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & P & \longmapsto & (P(0), P(1), P(2)) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccc} P_0 : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x(x-1) \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} P_1 : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & (x-1)(x-2) \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} P_2 : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x(2-x) \end{array}$$

(1) [sur 1 point(s)] Montrer que $\phi$ est lineaire.

On rappelle que, pour deux polynomes $P$ et $Q$ on a $(P + \lambda Q)(0) = P(0) + \lambda Q(0)$. Par conséquent

$$\begin{aligned}\phi(P + \lambda Q) &= ((P + \lambda Q)(0), (P + \lambda Q)(1), (P + \lambda Q)(2)) \\ &= (P(0), P(1), P(2)) + \lambda(Q(0), Q(1), Q(2)) = \phi(P) + \lambda\phi(Q).\end{aligned}$$

Donc $\phi$ est linéaire.

(2) [sur 2 point(s)] Calculer $(\phi(P_0), \phi(P_1), \phi(P_2))$ et en déduire que la famille $\mathcal{P} = (P_0, P_1, P_2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[x]$.

On a que $\phi(P_0) = (0, 0, 2)$ $\phi(P_1) = (2, 0, 0)$ et $\phi(P_2) = (0, 1, 0)$. Par conséquent, $\phi(P_0), \phi(P_1), \phi(P_2)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. En appliquant la contraposée de l'assertion démontrée à l'exercice 1, on obtient que $P_0, P_1, P_2$ est libre dans $\mathbb{R}_2[x]$ et contient le bon nombre de polynomes. C'est donc une base de $\mathbb{R}_2[x]$.

(3) [sur 1 point(s)] On note $\mathcal{E}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Ecrire la matrice de $\phi$ de la base $\mathcal{U}$ dans la base $\mathcal{E}$.

D'après la réponse à la question précédente et par définition de $Mat_{\mathcal{U}\to\mathcal{E}}(\phi)$ on a

$$Mat_{\mathcal{U}\to\mathcal{E}}(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Exercice 6.** [sur 4 point(s)] Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On pose

$$M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & b \end{pmatrix}$$

(1) [sur 1,5 point(s)] Calculer $\det(M)$ en fonction de $a$ et $b$

On a par combinaison de la deuxieme et troisieme colonnes puis des troisième et quatrième lignes :

$$\det(M) = \begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b \end{vmatrix}$$

On peut alors développer par rapport à la première colonne. Il vient

$$\det(M) = a \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & b \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & b \end{vmatrix} = a(b-1) - (b-1) = ab - (a+b) + 1$$

(2) [sur 1 point(s)] On pose $a = 1$ pour quelle(s) valeur(s) de $b$ la matrice $M$ n'est-elle pas inversible ?

Si $a = 1$ on trouve $\det(M) = 0$ quelque soit $b$. La matrice $M$ n'est donc jamais inversible.

(3) [sur 1,5 point(s)] On suppose $a = b = 1$. Determiner le rang de $M$.

Posons $a = b = 1$ alors

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

On cherche alors Ker $M$ par application de l'algorithme de Gauss. On ne retient ici que les matrices de coefficients du système car les données sont toujours nulles. Après opérations, on obtient la matrice de coefficients :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

correspondant à un système échelonné. Comme ce système a deux variables libres, on a donc $\mathrm{Ker}\, M = 2$ et donc par le théorème du rang $rang(M) = 4 - 2 = 2$.