CC1 - HLMA206 - 15/03/2019

Algèbre linéaire

Le sujet est composé de six exercices. Il est possible d'admettre et d'utiliser des résultats de l'énoncé pour répondre aux questions suivantes. Tout document et matériel électronique interdit. Il sera tenu compte de la clarté et de la précision de la rédaction.

Durée : 63 minutes.

Exercice 1. Soit E et Ê deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On se donne $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ une famille de vecteurs de E et $\phi : E \to \hat{E}$ une application linéaire. Montrer l'implication :

$$(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \text{ est une famille liée} \Longrightarrow (\phi(\mathbf{e}_1), \ldots, \phi(\mathbf{e}_n)) \text{ est une famille liée.}$$

Exercice 2. Soit $\mathcal{D}_3(\mathbb{R}) = \{M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 3} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \text{ t.q. } m_{i,j} = 0 \quad \forall\, i \neq j\}$.

(1) Montrer que $\mathcal{D}_3(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

(2) Expliciter une base de $\mathcal{D}_3(\mathbb{R})$ et en déduire la dimension de cet espace vectoriel.

Exercice 3. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les sous-espaces vectoriels

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } x + y + z = 0\} \quad F = \langle (1, 1, 1) \rangle.$$

(1) Calculer $E \cap F$.

(2) Les espaces E et F sont-ils supplémentaires ?

Exercice 4. Dans cet exercice on note $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et

$$\phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{array}$$

ainsi que $\mathbf{u}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3$, $\mathbf{u_2} = \mathbf{e_1} + \mathbf{e_2}$, $\mathbf{u}_3 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$.

(1) Montrer que la famille $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u_3})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(2) Exprimer la matrice de ϕ dans la base $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u_3})$.

Exercice 5. Dans cet exercice, on note :

$$\phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ P & \longmapsto & (P(0), P(1), P(2)) \end{array}$$

et

$$P_0 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x(x-1) \end{array} \qquad P_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (x-1)(x-2) \end{array} \qquad P_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x(2-x) \end{array}$$

(1) Montrer que ϕ est lineaire.

(2) Calculer $(\phi(P_0), \phi(P_1), \phi(P_2))$ et en déduire que la famille $\mathcal{P} = (P_0, P_1, P_2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[x]$.

(3) On note $\mathcal{E}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Ecrire la matrice de ϕ de la base $\mathcal{U}$ dans la base $\mathcal{E}$.

Exercice 6. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On pose

$$M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & b \end{pmatrix}$$

(1) Calculer $\det(M)$ en fonction de a et b

(2) On pose $a = 1$ pour quelle(s) valeur(s) de b la matrice M n'est-elle pas inversible ?

(3) On suppose $a = b = 1$. Determiner le rang de M.