Université de Montpellier - Faculté des Sciences

Année Universitaire 2017-2018

HLMA206
Contrôle Continu du 25 avril 2018

Les documents et calculatrices ne sont pas autorisés.

Toutes vos réponses doivent être justifiées. **La correction tiendra compte de la qualité de la rédaction.**

Questions de cours

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in I$.

1. Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$. Donner la définition de $f(x) = o(g(x))$ en a.
2. Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ telles que $f(x) = o(g(x))$ en a. En utilisant la définition donnée à la question 1, montrer les deux résultats suivants :
   (a) Soit $h : I \to \mathbb{R}$ telle que $g(x) = o(h(x))$ en a. Montrer que $f(x) = o(h(x))$ en a.
   (b) Soit $u : J \to I$ et $b \in J$ tels que $\lim_{t \to b} u(t) = a$. Montrer que $f(u(t)) = o(g(u(t)))$ en b.

Exercice 1

Soit $f :]-\frac{1}{2}, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x(x+1)} \ln\left(\frac{1+x}{1+2x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $]-\frac{1}{2}, +\infty[$.
2. On s'intéresse à la dérivabilité de f en 0.
   (a) Donner le DL à l'ordre 2 en 0 des fonctions $x \mapsto \frac{x}{1+2x}$ et $x \mapsto \ln(1 - \frac{x}{1+2x})$.
   (b) En utilisant ce qui précède, étudier la dérivabilité de f en 0. Si f est dérivable, préciser la valeur de $f'(0)$.

Exercice 2

Soit $a > 0$. On considère la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \left(\frac{1+a^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^x$.

1. Montrer que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \sqrt{a}$.
2. Calculer le développement limité de $y \mapsto a^y$ en 0, à l'ordre 2. En déduire $\lim_{x \to +\infty} x(f(x) - \sqrt{a})$.

Exercice 3

Pour chacune des deux fonctions suivantes, calculer le développement limité demandé, donner l'équation de la tangente au point considéré, et la position du graphe par rapport à sa tangente.

1. $f(x) = \frac{\sqrt{1+2x}}{\cos x}$, DL en 0 à l'ordre 3.
2. $g(x) = x\mathrm{e}^x$, DL en 1 à l'ordre 2.

Formulaire : développements limités usuels

$$
\begin{aligned}
\mathrm{e}^x &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\
\ln(1+x) &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^n) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) \\
(1+x)^\alpha &= \sum_{k=0}^{n} \Big(\prod_{j=0}^{k-1} (\alpha - j)\Big) \frac{x^k}{k!} + o(x^n) = 1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1)\frac{x^2}{2} + \cdots + \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)\frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\
\sin x &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) \\
\cos x &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) \\
\sinh x &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) \\
\cosh x &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})
\end{aligned}
$$