Université de Montpellier - Faculté des Sciences

Année Universitaire 2017-2018

HLMA 206
Correction du Contrôle Continu du vendredi 25 avril 2018

Ce document propose **une** correction des exercices du contrôle continu.

Questions de cours

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in I$.

1. Voir le cours.
2. Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ telles que $f(x) = o(g(x))$ en a. D'après la définition, il existe une fonction ε, définie au voisinage de a, telles que $f(x) = \varepsilon(x)g(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$.
   (a) Soit $h : I \to \mathbb{R}$ telles que $g(x) = o(h(x))$ en a. D'après la définition, il existe une fonction α, définie au voisinage de a, telles que $g(x) = \alpha(x)h(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$. On a alors, au voisinage de a,
   $$f(x) = \varepsilon(x)g(x) = \varepsilon(x)\alpha(x)h(x) = \beta(x)h(x)$$
   où $\beta(x) = \varepsilon(x)\alpha(x)$. Par produit de limites, on a $\lim\limits_{x\to a} \beta(x) = 0$, donc $f(x) = o(h(x))$ en a.
   (b) Soient $u : J \to I$ et $b \in J$ tels que $\lim\limits_{t\to b} u(t) = a$. On a alors $f(u(t)) = \varepsilon(u(t))g(u(t))$. Comme $\lim\limits_{t\to b} u(t) = a$, on a, par composition des limites,
   $$\lim_{t\to b} \varepsilon(u(t)) = \lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0.$$
   Donc $f(u(t)) = o(g(u(t)))$ en b.

Exercice 1

Soit $f :]-\frac{1}{2}, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x(x+1)} \ln\Big(\frac{1+x}{1+2x}\Big) & \text{si } x \neq 0 \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Pour tout $x \in]-\frac{1}{2}, +\infty)$ on a $1 + x > 0$ et $1 + 2x > 0$, donc la fonction $x \mapsto \frac{1+x}{1+2x}$ est continue et strictement positive comme quotient de fonctions continues strictement positives. Comme la fonction ln est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, par composition la fonction $x \mapsto \ln(\frac{1+x}{1+2x})$ est continue sur $]-\frac{1}{2}, +\infty)$.

   Par ailleurs la fonction $x \mapsto x(x + 1)$ est polynomiale, donc continue sur $]-\frac{1}{2}, +\infty)$ et, sur cet intervalle, elle ne s'annule qu'en $x = 0$. On en déduit que f est continue sur $]-\frac{1}{2}, +\infty) \setminus \{0\}$ comme quotient de fonctions continues, dont le dénominateur ne s'annule pas.

   <u>Continuité en 0.</u> On a
   $$\ln\Big(\frac{1+x}{1+2x}\Big) = \ln\Big(1 - \frac{x}{1+2x}\Big)$$

Comme $\ln(1+y) \sim_0 y$ et $\lim_{x\to 0} \frac{-x}{1+2x} = 0$, on a

$$\ln\Big(\frac{1+x}{1+2x}\Big) \sim_0 \frac{-x}{1+2x}.$$

On obtient donc

$$f(x) \sim_0 \frac{1}{x(x+1)} \times \frac{-x}{1+2x} = \frac{-1}{(x+1)(1+2x)},$$

et

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{-1}{(x+1)(1+2x)} = -1 = f(0).$$

Donc f est continue en 0, et f est continue sur l'intervalle $]-\frac{1}{2}, +\infty[$.

2. On s'intéresse à la dérivabilité de f en 0.

   (a) Le DL en 0 à l'ordre 1 de $\frac{1}{1+y}$ donne

   $$\frac{1}{1+y} = 1 - y + o(y),$$

   donc

   $$\frac{1}{1+2x} = 1 - 2x + o(x),$$

   et

   $$\frac{-x}{1+2x} = -x + 2x^2 + o(x^2),$$

   qui est le DL en 0 à l'ordre 2 de $x \mapsto \frac{x}{1+2x}$. Le DL en 0 à l'ordre 2 de $\ln(1+y)$ est

   $$\ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + o(y^2)$$

   et $\lim_{x\to 0} \frac{-x}{1+2x} = 0$, donc, par composition des DL on obtient

   $$\ln(1 - \frac{x}{1+2x}) = \big(-x + 2x^2\big) - \frac{1}{2}\big(-x+2x^2\big)^2 + o(x^2) \quad (1)$$
   $$= -x + 2x^2 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad (2)$$
   $$= -x + \frac{3}{2}x^2 + o(x^2) \quad (3)$$

   qui est le DL en 0 à l'ordre 2 de $x \mapsto \ln(1 - \frac{x}{1+2x})$.

   (b) Le taux d'accroissement en 0 de f est

   $$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{f(x)+1}{x} = \frac{1}{x}\Big(\frac{1}{x(x+1)}\ln\Big(\frac{1+x}{1+2x}\Big) + 1\Big) = \frac{\ln\Big(\frac{1+x}{1+2x}\Big) + x(x+1)}{x^2(x+1)}.$$

   Le DL de la question précédente donne

   $$\ln\Big(\frac{1+x}{1+2x}\Big) + x(x+1) = -x + \frac{3}{2}x^2 + o(x^2) + x^2 + x = \frac{5}{2}x^2 + o(x^2),$$

   donc

   $$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\frac{5}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2(x+1)} = \frac{\frac{5}{2} + o(1)}{x+1},$$

   et

   $$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{5}{2}.$$

   Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = \frac{5}{2}$.

Exercice 2

Soit $a > 0$. On considère la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \left(\frac{1+a^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^x$.

1. On a

$$f(x) = \mathrm{e}^{x \ln\left(\frac{1+a^{\frac{1}{x}}}{2}\right)}$$

Par ailleurs, on a

$$\ln\Big(\frac{1+a^{\frac{1}{x}}}{2}\Big) = \ln\Big(1 + \frac{a^{\frac{1}{x}} - 1}{2}\Big) = \ln\Big(1 + \frac{\mathrm{e}^{\frac{\ln a}{x}} - 1}{2}\Big).$$

Comme $\mathrm{e}^y - 1 \sim_0 y$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln a}{x} = 0$, on a

$$\frac{\mathrm{e}^{\frac{\ln a}{x}} - 1}{2} \sim_{+\infty} \frac{\ln a}{2x}$$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\frac{\ln a}{x}}-1}{2} = 0$. Comme $\ln(1+y) \sim_0 y$ on a alors

$$\ln\Big(1 + \frac{\mathrm{e}^{\frac{\ln a}{x}} - 1}{2}\Big) \sim_{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\frac{\ln a}{x}} - 1}{2} \sim_{+\infty} \frac{\ln a}{2x},$$

et

$$x \ln\Big(\frac{1+a^{\frac{1}{x}}}{2}\Big) \sim_{+\infty} \frac{\ln a}{2} = \ln(\sqrt{a}).$$

On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} x \ln\left(\frac{1+a^{\frac{1}{x}}}{2}\right) = \ln(\sqrt{a})$ et, par continuité de l'exponentielle,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \mathrm{e}^{\ln(\sqrt{a})} = \sqrt{a}$$

2. Le DL en 0 à l'ordre de de e^t donne

$$\mathrm{e}^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

Comme $a^y = \mathrm{e}^{y \ln a}$ et $\lim\limits_{y\to 0}(y \ln a) = 0$, on a

$$a^y = 1 + y \ln a + \frac{(\ln a)^2}{2} y^2 + o(y^2)$$

qui est le DL en 0 à l'ordre 2 de $y \mapsto a^y$.

On a

$$\begin{aligned} f(x) - \sqrt{a} &= \mathrm{e}^{x \ln\left(\frac{1+a^{\frac{1}{x}}}{2}\right)} - \mathrm{e}^{\ln(\sqrt{a})} \\ &= \mathrm{e}^{\ln(\sqrt{a})}\Big(\mathrm{e}^{x \ln\left(\frac{1+a^{\frac{1}{x}}}{2}\right) - \ln(\sqrt{a})} - 1\Big) \\ &= \sqrt{a}\Big(\mathrm{e}^{x \ln\left(\frac{1+a^{\frac{1}{x}}}{2}\right) - \ln(\sqrt{a})} - 1\Big) \end{aligned}$$

Le DL calculé précédemment donne

$$\frac{1+a^y}{2} = 1 + \frac{\ln a}{2} y + \frac{(\ln a)^2}{4} y^2 + o(y^2)$$

et comme $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$, une composition de DL donne

$$\begin{aligned}
\ln\Big(\frac{1+a^y}{2}\Big) &= \ln\Big(1 + \frac{\ln a}{2}y + \frac{(\ln a)^2}{4}y^2 + o(y^2)\Big) \\
&= \Big(\frac{\ln a}{2}y + \frac{(\ln a)^2}{4}y^2\Big) - \frac{1}{2}\Big(\frac{\ln a}{2}y + \frac{(\ln a)^2}{4}y^2\Big)^2 + o(y^2) \\
&= \frac{\ln a}{2}y + \frac{(\ln a)^2}{4}y^2 - \frac{(\ln a)^2}{8}y^2 + o(y^2) \\
&= \frac{\ln a}{2}y + \frac{(\ln a)^2}{8}y^2 + o(y^2)
\end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, on obtient en $+\infty$

$$\ln\Big(\frac{1+a^{\frac{1}{x}}}{2}\Big) = \frac{\ln a}{2x} + \frac{(\ln a)^2}{8x^2} + o(\frac{1}{x^2})$$

et

$$x\ln\Big(\frac{1+a^{\frac{1}{x}}}{2}\Big) = \frac{\ln a}{2} + \frac{(\ln a)^2}{8x} + o(\frac{1}{x}) = \ln(\sqrt{a}) + \frac{(\ln a)^2}{8x} + o(\frac{1}{x}).$$

On obtient donc

$$x\ln\Big(\frac{1+a^{\frac{1}{x}}}{2}\Big) - \ln(\sqrt{a}) = \frac{(\ln a)^2}{8x} + o(\frac{1}{x}) \sim_{+\infty} \frac{(\ln a)^2}{8x}$$

Comme $\mathrm{e}^y - 1 \sim_0 y$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(\ln a)^2}{8x} = 0$ on obtient

$$\mathrm{e}^{x\ln\left(\frac{1+a^{\frac{1}{x}}}{2}\right) - \ln(\sqrt{a})} - 1 \sim_{+\infty} \frac{(\ln a)^2}{8x}$$

d'où

$$f(x) - \sqrt{a} \sim_{+\infty} \frac{\sqrt{a}(\ln a)^2}{8x}$$

et

$$x(f(x) - \sqrt{a}) \sim_{+\infty} \frac{\sqrt{a}(\ln a)^2}{8}.$$

On a donc

$$\lim_{x\to+\infty} x(f(x) - \sqrt{a}) = \frac{\sqrt{a}(\ln a)^2}{8}.$$

Exercice 3

Pour chacune des deux fonctions suivantes, calculer le développement limité demandé, donner l'équation de la tangente au point considéré, et la position du graphe par rapport à sa tangente.

1. $f(x) = \frac{\sqrt{1+2x}}{\cos x}$, DL en 0 à l'ordre 3.

   Le DL en 0 à l'ordre 3 de $(1+y)^{\frac{1}{2}}$ est

$$(1+y)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}(-\frac{1}{2})\frac{y^2}{2} + \frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\frac{y^3}{6} + o(y^2) = 1 + \frac{y}{2} - \frac{y^2}{8} + \frac{y^3}{16} + o(y^2)$$

   d'où

$$\sqrt{1+2x} = (1+2x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{2x}{2} - \frac{4x^2}{8} + \frac{8x^3}{16} + o(x^3) = 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + o(x^3)$$

Par ailleurs, on a $\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1+(\cos x - 1)}$. Le DL en 0 à l'ordre 3 de $\frac{1}{1+y}$ est $\frac{1}{1+y} = 1-y+y^2-y^3+o(y^3)$, et le DL en 0 à l'ordre 3 de $\cos x$ est $\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)$, d'où $\cos x - 1 = -\frac{x^2}{2}+o(x^3)$. Comme $\lim_{x\to 0}(\cos x - 1) = 0$, par composition de DL on obtient

$$\frac{1}{\cos x} = 1 - (-\frac{x^2}{2}) + (-\frac{x^2}{2})^2 - (-\frac{x^2}{2})^3 + o(x^3) = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

Finalement, un produit de DL donne

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{1+2x}}{\cos x} &= (1+\frac{x^2}{2})(1+x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}) + o(x^3)\\ &= 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + o(x^3)\\ &= 1 + x + x^3 + o(x^3)\end{aligned}$$

L'équation de la tangente au graphe de f en 0 est $y = x + 1$ et comme

$$f(x) - (x+1) = x^3 + o(x^3) \sim_0 x^3,$$

le graphe de f est en dessous de sa tangente pour $x < 0$ et au dessus pour $x > 0$.

2. $g(x) = x\mathrm{e}^x$, DL en 1 à l'ordre 2.

   On pose $y = x - 1$ et on a $x\mathrm{e}^x = (1+y)\mathrm{e}^{1+y} = (1+y)\mathrm{e}.\mathrm{e}^y$. Comme $\lim_{x\to 1} y = 0$, on cherche le DL en 0 à l'ordre 2 de $(1+y)\mathrm{e}.\mathrm{e}^y$.

   Le DL de e^y est $\mathrm{e}^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + o(y^2)$, d'où

$$\begin{aligned}(1+y)\mathrm{e}^y &= (1+y)(1+y+\frac{y^2}{2}+o(y^2))\\ &= 1 + y + \frac{y^2}{2} + o(y^2) + y + y^2 + \frac{y^3}{2} + o(y^3)\\ &= 1 + 2y + \frac{3}{2}y^2 + o(y^2)\end{aligned}$$

   et

$$(1+y)\mathrm{e}^{1+y} = \mathrm{e} + 2\mathrm{e}y + \frac{3\mathrm{e}}{2}y^2 + o(y^2).$$

   Le DL en 1 à l'ordre 2 de $g(x)$ est donc

$$x\mathrm{e}^x = \mathrm{e} + 2\mathrm{e}(x-1) + \frac{3\mathrm{e}}{2}(x-1)^2 + o((x-1)^2).$$

   L'équation de la tangente au graphe de g en 1 est $y = \mathrm{e} + 2\mathrm{e}(x-1)$ et comme

$$f(x) - (\mathrm{e} + 2\mathrm{e}(x-1)) = \frac{3\mathrm{e}}{2}(x-1)^2 + o((x-1)^2) \sim_1 \frac{3\mathrm{e}}{2}(x-1)^2,$$

   le graphe de f est au dessus de sa tangente.