

Feuille d'exercices 5 - Réponses numériques

Exercice 1.

Exercice 2. Effectuer la division euclidienne de A par B .

- (a) $A = X^4 - 2X^3 + 4X^2 - 6X + 8$ et $B = X - 1$, en déduire l'évaluation $A(1)$,
 $Q = X^3 - X^2 + 3X + 3$, $R = 5$
- (b) $A = 2X^5 - 5X^3 - 8X$ et $B = X + 3$, en déduire l'évaluation $A(-3)$,
 $Q = 2X^4 - 6X^3 + 13X^2 - 39X + 109$, $R = -327$
- (c) $A = 4X^4 - 3X^3 + 4X^2 - 5X + 6$ et $B = X^2 - 3X + 1$,
 $Q = 4X^2 + 9X + 27$, $R = 67X - 21$

Exercice 3. Développer A en puissances de $X - 2$. En déduire les dérivées de la fonction $A(x)$ en 2.

- (a) $A = X^4 - 8X^3 + 24X^2 - 50X + 90 = 38 - 18(X - 2) + (X - 2)^4$
- (b) $A = X^5 - 4X^3 + 6X^2 - 8X + 10 = 18 + 48(X - 2) + 62(X - 2)^2 + 36(X - 2)^3 + 10(X - 2)^4 + (X - 2)^5$.

Exercice 4. Trouver le PGCD de A et B ainsi que son expression linéaire en fonction de A et B pour

- (a) $A = X^4 + 2X^3 - X^2 - 4X - 2$ et $B = X^4 + X^3 - X^2 - 2X - 2$, $PGCD = X^2 - 2 = (-X - 1)A + (X + 2)B$
- (b) $A = 3X^3 - 2X^2 + X + 2$ et $B = X^2 - X + 1$. $PGCD = 1 = XA + (-3X^2 - X + 1)B$

Exercice 5. Pour P, A, B , trouver S, T tels que $P = SA + TB$

- (a) $P = 2X - 1$, $A = X^3$ et $B = (X - 1)^2$, $PGCD(A, B) = 1 = (-3X + 4)A + (3X^2 + 2X + 1)B$
- (b) $P = 1$, $A = (X - 1)(X - 2)$ et $B = X(X + 1)(X + 2)$. $PGCD(A, B) = 1 = (X^2/8 + 11X/24 + 1/2)A + (-X/8 + 7/24)B$

Exercice 6. Trouver la multiplicité de z_0 comme racine du polynôme A .

- (a) $A = X^5 - 5X^4 + 7X^3 - 2X^2 + 4X - 8$ avec $z_0 = 2$, multiplicité 3
- (b) $A = X^5 + 7X^4 + 16X^3 + 8X^2 - 16X - 16$ avec $z_0 = -2$, multiplicité 4

Exercice 7. Soit $n \in \mathbb{N}$. Trouver $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $aX^{n+1} + bX^n + 1$ soit divisible par $(X - 1)^2$.

Exercice 8. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que le polynôme $T_n = \sum_{k=0}^n \frac{X^k}{k!}$ n'a pas de racine double.

Exercice 9. Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ les polynômes suivants :

- (a) $X^3 - 5X^2 + 3X + 9$,
- (b) $X^5 - 7X^3 - 2X^2 + 12X + 8$,
- (c) $X^2 + (3i - 1)X - 2 - i$,
- (d) $X^4 + (3i - 1)X^2 - 2 - i$,
- (e) $X^3 + (4 + i)X^2 + (5 - 2i)X + 2 - 3i$.
- (a) $(X - 3)^2(X + 1)$,
- (b) $(X - 2)^2(X + 1)^2(X + 2)$,
- (c) $(X + i)(X - 1 + 2i)$,
- (d) $(X + 1)(X - i)(X + 3 + 2i)$.

Exercice 10. Soit $n \in \mathbb{N}$. Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants :

- (a) $X^n - 1$,
- (b) $X^3 - 2$,
- (c) $X^6 + 27$,
- (d) $X^{3n} + X^{2n} + X^n + 1$.
- (a) cf poly
- (b) $(X - a^{\frac{1}{3}})(X - ja^{\frac{1}{3}})(X - j^2a^{\frac{1}{3}})$
- (c) $(X^2 - 3X + 3)(X^2 + 3)(X^2 + 3X + 3)$
- (d) $(X + 1)(X^2 + 1)$ pour $n = 1$.

Exercice 11.

Exercice 12. Déterminer le PGCD des deux polynômes suivants :

- (a) $(X - 1)^3(X + 2)^2(X - 3)(X + 4)$ et $(X - 1)^2(X + 2)(X + 5)$,
- (b) $(X - 1)(X^2 - 1)(X^3 - 1)$ et $(X + 1)(X^2 + 1)(X^3 + 1)$,
- (c) $X^m - 1$ et $X^n - 1$.
- (a) $(X - 1)^2(X + 2)$,
- (b) $(X + 1)^2(X^2 + 1)$,
- (c) $X^{\text{pgcd}(n,m)} - 1$.

Exercice 13.

Exercice 14.

Exercice 15.

Exercice 16.