UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER — L2 - ALGÈBRE 3 (HLMA301)
ANNÉE : 2019-2020

# Feuille d'exercices 6

**Exercice 1.** Vrai ou faux ?

(a) Soient $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ et soit $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Si $P^{-1}AP = B$, alors $A$ et $B$ ont le même polynôme caractéristique.

(b) Soient $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ et soit $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Si $P^{-1}AP = B$, alors $A$ et $B$ ont le même polynôme minimal.

(c) Si le polynôme minimal est égal au polynôme caractéristique, alors l'endomorphisme est diagonalisable.

**Exercice 2.** Déterminer le polynôme minimal des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

**Exercice 3.** On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Déterminer son polynôme caractéristique $P_A(X)$.

(b) Montrer que $A$ n'est pas diagonalisable.

(c) Trouver $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ et $T \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure telles que $AP = PT$.

(d) Déterminer le polynôme minimal $\Pi_A(X)$ de $A$.

(e) Calculer la matrice $A^{17} - 3A^{16} + 4A^{14} + A - I_4$.

**Exercice 4.** On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(a) Déterminer le polynôme caractéristique $P_A(X)$.

(b) On note $a_nX + b_n$ le reste de la division euclidienne de $X^n$ par $P_A(X)$. Déterminer $a_n$ et $b_n$.

(c) Exprimer la matrice $A^n$ en fonction de $a_n, b_n$.

(d) Montrer qu'il existe une matrice $A_\infty$ que l'on déterminera telle que $\lim_{n\to\infty} A^n = A_\infty$.

**Exercice 5.** Déterminer le polynôme minimal des matrices de l'exercice 8 de la feuille de TD4.

**Exercice 6.** Soit $n \geqslant 2$ et $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$. Montrer que

$$\det \begin{pmatrix} -X & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & -X & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -X & \cdots & 0 & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & -X & 0 & -a_{n-3} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -X & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} = (-1)^n(a_{n-1}X^{n-1}+a_{n-2}X^{n-2}+\cdots+a_1X+a_0).$$

(On pourra développer par rapport à la dernière ligne.) En déduire le lemme des matrices compagnons.

**Exercice 7.** Soit $n \geqslant 2$. On considère la matrice

$$C_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{M}_n(\mathbb{C}).$$

(a) Montrer que son polynôme caractéristique est $P_{C_n}(X) = (-1)^n(X^n - 1)$.
(b) Déterminer son spectre $\mathrm{Sp}(C_n)$.
(c) Pour quels $n$ la matrice $C_n$ est-elle diagonalisable dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ ? Justifier.
(d) Pour quels $n$ la matrice $C_n$ est-elle trigonalisable dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ ? Justifier.
(e) Pour quels $n$ la matrice $C_n$ est-elle diagonalisable dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ ? Justifier.
(f) Pour quels $n$ la matrice $C_n$ est-elle trigonalisable dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ ? Justifier.

**Exercice 8.** Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, et $P \in \mathbb{C}[X]$. On considère la matrice $B = P(A)$.

(1) (a) Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, montrer que $P(\lambda) \in \mathrm{Sp}(B)$.
  (b) Soit $\mu \in \mathbb{C}$, on considère le polynôme $P(X) - \mu$.
    (i) Justifier qu'il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_d \in \mathbb{C}$ et $c \in \mathbb{C}^*$ tels que$P(X) - \mu = c\prod_{i=1}^d (X - \alpha_i)$.
    (ii) Montrer que $\det(B - \mu I_n) = c^n \prod_{i=1}^d \det(A - \alpha_i I_n)$.
    (iii) Montrer que si $\mu \in \mathrm{Sp}(B)$, alors il existe $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ tel que $\mu = P(\lambda)$.
  (c) Montrer que $\mathrm{Sp}(B) = \{P(\lambda) : \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\}$.

(2) On note $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$. On considère le polynôme $Q(X) = \prod_{i=1}^k (\lambda_i - X)$ et on pose $C = Q(A)$.
  (a) Montrer que $\mathrm{Sp}(C) = \{0\}$.
  (b) Déterminer le polynôme carcatéristique $P_C(X)$.
  (c) Montrer que $C^n = 0$.
  (d) Donner un exemple de matrice $A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{C})$ telle que $C^2 \neq 0$.

**Exercice 9.** Soit $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que

$$AB = A^2 + I_n,$$

où $I_n$ est la matrice identité de taille $n$.

(a) Montrer que $A$ est inversible.
(b) Montrer que $A$ et $B$ commutent, c'est-à-dire que $AB = BA$.
(c) On suppose qu'il existe $P = \sum_{t=0}^d c_t X^t \in \mathbb{K}[X]$ tel que $AB = P(A)$ et $c_0 \neq 0$. Montrer que $A$ est inversible et que $A$ et $B$ commutent.