UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER
FACULTÉ D'ÉCONOMIE
Année universitaire 2017-2018 - EXAMENS

Année d'étude : Master 1	Enseignant : M. Beaud
Matière : Théorie des Jeux	Durée : 2h
Semestre : 1	Session : 1

Documents autorisés non
Dictionnaires autorisés pour les étudiants non francophones oui
Calculatrices non programmables autorisées oui

L'utilisation du téléphone portable durant les épreuves est formellement interdite.

Sujet :

Considérez le jeu dynamique à information incomplète (étudié comme un jeu à information complète mais imparfaite grâce à la transformation d'Harsanyi) représenté sur la Figure 1. Il existe deux joueurs, le joueur 1 et le joueur 2. Le premier coup est un coup aléatoire, joué par « la nature ». La nature détermine la force du joueur 1. Avec une probabilité égale à p, le joueur 1 est fort. Avec une probabilité égale à 1-p, le joueur 1 est faible. On suppose $0<p<1$.

Qu'il soit fort ou faible, le joueur 1 est confronté au joueur 2. Le joueur 2 peut choisir d'intimider (action **I**) le joueur 1 ou de s'incliner (action **S**) devant lui. Le joueur 2 s'inclinerait s'il savait que le joueur 1 est fort (1>0), et l'intimiderait s'il savait qu'il est faible (1>0). D'un autre côté, le joueur 1 préfère toujours ne pas être intimidé (3>1 et 2>0). Le joueur 1 ne peut pas prouver au joueur 2 qu'il est fort ou qu'il est faible, mais il peut cependant envoyer un « signal ». En imaginant que le jeu se déroule dans une brasserie, on suppose que le joueur 1 peut soit commander une bière (action **B**), soit commander une quiche (action **Q**). Cette action est observée par le jouer 2 avant qu'il décide d'intimider ou non le joueur 1. Si le joueur 1 est fort, il préfère boire une bière (1>0 et 3>2). S'il est faible, il préfère manger une quiche (1>0 et 3>2).

La forme extensive du jeu est connaissance commune.

Pour le joueur 1, on note x_F la probabilité qu'il joue **B** dans l'ensemble d'information 1.F (s'il est fort) et on note x_f la probabilité qu'il joue **B** dans l'ensemble d'information 1.f (s'il est faible). Pour le joueur 2, on note y_B la probabilité qu'il joue **I** dans l'ensemble d'information 2.B (s'il observe que le joueur 1 boit une bière) et on note y_Q la probabilité qu'il joue **I** dans l'ensemble d'information 2.Q (s'il observe que le joueur 1 mange une quiche).

De plus, on note β la probabilité que le joueur 1 soit fort sachant qu'il boit une bière (sachant que l'ensemble d'information 2.B est atteint), et on note γ la probabilité que le joueur 1 soit fort sachant qu'il mange une quiche (sachant que l'ensemble d'information 2.Q est atteint).

<u>**Sujet (suite)**</u> :

1. Représentez le jeu sous forme normale, c'est-à-dire construire la matrice des paiements. Vous noterez par exemple **BQ** une stratégie conditionnelle du joueur 1 consistant à jouer **B** s'il est fort (en 1.F) et **Q** s'il est faible (en 1.f). Aussi, vous noterez par exemple **IS** une stratégie conditionnelle du joueur 2 consistant à jouer **I** s'il observe **B** (en 2.B) et à jouer **S** s'il observe **Q** (en 2.Q). *(4 points)*

2. On suppose que $p=0.5$. La matrice des paiements est la suivante :

$p=0.5$	**II**	**IS**	**SI**	**SS**
BB	0.5 ; 0.5	0.5 ; 0.5	2.5 ; 0.5	2.5 ; 0.5
BQ	1 ; 0.5	2 ; 0	2 ; 1	3 ; 0.5
QB	0 ; 0.5	1 ; 1	1 ; 0	2 ; 0.5
QQ	0.5 ; 0.5	2.5 ; 0.5	0.5 ; 0.5	2.5 ; 0.5

Souligner les paiements associés aux meilleures réponses des joueurs. Identifier les deux équilibres de Nash en stratégies pures. Pour chaque équilibre, donner la stratégie effectivement jouée par le joueur 2. *(2 points)*

3. Considérez les deux équilibres de Nash en stratégies pures identifiés ci-dessus. Pour chaque équilibre, ajouter une condition (concernant la valeur de β ou celle θ) afin qu'il soit un équilibre de Nash parfait. *(2 points)*

4. De manière intuitive, essayez d'expliquer en quoi l'équilibre de Nash (**QQ** ; **IS**) n'est pas satisfaisant ? Interrogez-vous notamment sur la stratégie du joueur 2 ? *(1 point)*

5. On suppose désormais que $p=0.2$. La matrice des paiements est la suivante :

	II	**IS**	**SI**	**SS**
BB	0.2 ; 0.8	0.2 ; 0.8	2.2 ; 0.2	2.2 ; 0.2
BQ	1 ; 0.8	2.6 ; 0	1.4 ; 1	3 ; 0.2
QB	0 ; 0.8	0.4 ; 1	1.6 ; 0	2 ; 0.2
QQ	0.8 ; 0.8	2.8 ; 0.2	0.8 ; 0.8	2.8 ; 0.2

Raisonnez uniquement en stratégies pures et réduire le jeu au maximum. Observez ensuite que la stratégie **QB** est strictement dominée par au moins une stratégie mixte, de la forme : $(p_1, q_1, 0, 1-p_1-q_1)$ où $0<p_1+q_1\leq 1$. Ecrire les trois conditions (concernant p_1 et q_1) impliquant que la stratégie **QB** est strictement dominée. Donner un exemple de stratégie mixte vérifiant ces trois conditions. *(2 points)*

6. Montrer que la combinaison de stratégies $\{(¼, ¾, 0, 0) ; (½, 0, ½, 0)\}$ forme un équilibre de Nash. (*4 points*)

<u>Sujet (suite)</u> :

7. L'unique équilibre de Nash du jeu est $\{(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 0, 0)\,;\,(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0)\}$. Traduire les stratégies mixtes d'équilibre (qui ont pour support des stratégies conditionnelles) en stratégies de comportement, c'est-à-dire donner x_F, x_f , y_B et y_Q. *(1 point)*

8. En utilisant la règle de Bayes, calculer les probabilités conditionnelles β et θ à l'équilibre de Nash. *(2 points)*

9. Pour chaque joueur, vérifier si la rationalité séquentielle est satisfaite à chaque ensemble d'information. *(2 points)*