

40 points ramenés sur 20, 90 minutes (~2 min/pt). Calculatrice collègue et formulaire manuscrit A4 recto-verso autorisés. Merci de répondre **uniquement sur ce sujet**.

1. On considère la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x \in [0; 1] \\ ax^2 + bx + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$  (4 pt)

1.1. A quelle condition (sur  $a$  et  $b$ ) la fonction  $f$  est-elle continue en  $x = 1$  ?

1.2. A quelle condition (sur  $a$  et  $b$ ) la fonction  $f$  est-elle dérivable en  $x = 1$  ?

1.3. Déterminer les valeurs de  $a$  et  $b$ .

2. Prolonger par continuité la fonction  $f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}$  en  $x = 1$ . (2 pt)

3. Déterminer l'ensemble des primitives des fonctions suivantes : (1 pt)

3.1.  $f_1(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x^2+1} + \frac{x}{x^2+1}$

$$3.2. f_2(x) = \left( \frac{x}{x^3 + 1} \right)^2 \quad (2 \text{ pt})$$

$$3.3. f_3(x) = \frac{2x^4 + 1}{x(x^2 + 2)} \quad (3 \text{ pt})$$

4. Dans les exercices de cette section, cocher la méthode d'intégration choisie et calculer l'intégrale  $I$ . **Attention** : un changement de variable est proposé mais il peut ne pas constituer la méthode à utiliser (auquel cas il faut l'ignorer).

$$4.1. I = \int_0^1 x \cdot \arctan(x) \, dx \quad (3 \text{ pt})$$

<input type="checkbox"/> Forme immédiate	<input type="checkbox"/> Fraction rationnelle	<input type="checkbox"/> IPP	<input type="checkbox"/> Changement de variable $u = \arctan x$

$$4.2. I = \int_1^e x^2 \ln(x) \, dx \quad (2 \text{ pt})$$

<input type="checkbox"/> Forme immédiate	<input type="checkbox"/> Fraction rationnelle	<input type="checkbox"/> IPP	<input type="checkbox"/> Changement de variable $u = \ln x$

$$4.3. I = \int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{2x+2} dx \text{ (2 pt)}$$

<input type="checkbox"/> Forme immédiate	<input type="checkbox"/> Fraction rationnelle	<input type="checkbox"/> IPP	<input type="checkbox"/> Changement de variable $u = 2x + 2$
--	---	------------------------------	---

$$4.4. I = \int_0^1 \frac{dx}{e^x + 1} \text{ (3 pt)}$$

<input type="checkbox"/> Forme immédiate	<input type="checkbox"/> Fraction rationnelle	<input type="checkbox"/> IPP	<input type="checkbox"/> Changement de variable $u = e^x$
--	---	------------------------------	--

$$4.5. I = \int_0^\pi x \cos(x) \sin(x) dx \text{ (3 pt)}$$

<input type="checkbox"/> Forme immédiate	<input type="checkbox"/> Fraction rationnelle	<input type="checkbox"/> IPP	<input type="checkbox"/> Changement de variable $t = \cos x$
--	---	------------------------------	---

$$4.6. I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2}} \text{ (3 pt)}$$

<input type="checkbox"/> Forme immédiate	<input type="checkbox"/> Fraction rationnelle	<input type="checkbox"/> IPP	<input type="checkbox"/> Changement de variable $u = \frac{x}{2} - 1$
--	---	------------------------------	--

$$4.7. I = \int_0^1 \frac{x^2 - 2}{(x + 1)(x + 2)} dx \text{ (3 pt)}$$

<input type="checkbox"/> Forme immédiate	<input type="checkbox"/> Fraction rationnelle	<input type="checkbox"/> IPP	<input type="checkbox"/> Changement de variable $u = x^2$
--	---	------------------------------	--

5. Après avoir précisé leurs natures, résoudre les équations différentielles suivantes :

$$5.1. y' + \frac{2x}{x^2 + 1}y = 0 \text{ (2 pt)}$$

Nature de l'équation différentielle :

$$5.2. y' - y = 4 + e^{-x} + \sin x \text{ (4 pt)}$$

Nature de l'équation différentielle :

$$5.3. y' - 2y = \frac{x}{e^{-2x}(x + 1)} \text{ (3 pt)}$$

Nature de l'équation différentielle :