Outils mathématiques 2 — DS **NOM :** C. PALERMO **Groupe :** **Note :**

*40 points ramenés sur 20, 90 minutes (~2 min/pt). Calculatrice collège et formulaire manuscrit A4 recto-verso autorisés. Merci de répondre **uniquement sur ce sujet**.*

1. On considère la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} \text{ si } x \in [0;1] \\ ax^2 + bx + 1 \text{ si } x > 1 \end{cases}$ *(4 pt)*

1.1. A quelle condition (sur a et b) la fonction f est-elle continue en $x = 1$?

f continue en $x=1 \iff \lim\limits_{x\to1} f(x) = \lim\limits_{x\to1}\sqrt{x} = \lim\limits_{x\to1} ax^2+bx+1$

$\iff a+b+1=1 \iff a+b=0$

$\Rightarrow a=-b$

1.2. A quelle condition (sur a et b) la fonction f est-elle dérivable en $x = 1$?

f dérivable en $1 \iff \lim\limits_{x\to1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} \in \mathbb{R}$.

L'expression de f n'est pas la même à gauche et à droite de 1

$\rightarrow \lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{1^-} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} = $ "$\frac{0}{0}$" $\rightarrow$ l'Hopital

$= \lim\limits_{1^-} \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2}$.

Il faut donc que $\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \dfrac{1}{2} = \lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{ax^2+bx+1-1}{x-1}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{ax^2+bx}{x-1} = \dfrac{1}{2} =$ "$\frac{0}{0}$" car $a=-b \Rightarrow \lim\limits_{1^+} \dfrac{2ax+b}{1} = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow 2a+b = 1/2$

1.3. Déterminer les valeurs de a et b.

$\begin{cases} a=-b \\ 2a+b=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow a=1/2$ et $b=-1/2$

2. Prolonger par continuité la fonction $f(x) = \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{2}{1-x^2}$ en $x = 1$. *(2 pt)*

$\mathcal{D}f = \mathbb{R}\setminus\{-1;1\} \Rightarrow$ On cherche à prolonger f en $x=1$

$\lim\limits_{1} f(x) = \lim\limits_{1} \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{2}{1-x^2} = $ "$\infty-\infty$"

$= \lim\limits_{1} \dfrac{1+x}{(1-x)(1+x)} - \dfrac{2}{1-x^2} = \lim\limits_{1} \dfrac{x-1}{1-x^2} = $ "$\frac{0}{0}$"

$\rightarrow$ l'Hopital $\Rightarrow \lim\limits_{1} f(x) = \lim\limits_{1} \dfrac{1}{-2x} = -1/2$

$\Rightarrow \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \neq 1 \\ -1/2 \text{ si } x = 1 \end{cases}$

3. Déterminer l'ensemble des primitives des fonctions suivantes : *(1 pt)*

3.1. $f_1(x) = \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{2}{x^2+1} + \dfrac{x}{x^2+1}$

On a une forme immédiate

$\dfrac{1}{x+1} \rightarrow \ln|x+1|$ $\quad \dfrac{2}{x^2+1} \rightarrow 2\arctan x$

$\dfrac{x}{x^2+1} = \dfrac{1}{2}\dfrac{u'}{u}$ avec $u = x^2+1$ et $u'=2x$.

$\Rightarrow F_1(x) = k + \ln|x+1| + 2\arctan x + \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$

3.2. $f_2(x) = \left(\dfrac{x}{x^3+1}\right)^2$ *(2 pt)*

$$f_2(x) = \frac{x^2}{(x^3+1)^2} = x^2(x^3+1)^{-2} \to n=-2$$

$$u = x^3+1 \Rightarrow u' = 3x^2$$

$$u'u^n = 3x^2(x^3+1)^{-2} = 3f_2(x) \Rightarrow f_2(x) = \frac{u'u^n}{3}$$

$$\Rightarrow F_2(x) = K + \frac{1}{3}\frac{u^{n+1}}{n+1} = K + \frac{1}{3}\frac{(x^3+1)^{-1}}{-1} = K - \frac{1}{3(x^3+1)} = F_2(x)$$

3.3. $f_3(x) = \dfrac{2x^4+1}{x(x^2+2)}$ *(3 pt)*

① Fraction rationnelle avec $\deg N > \deg D \Rightarrow$ division euclidienne.

$$\begin{array}{r|l} 2x^4+1 & x^3+2x \\ -(2x^4+4x^2) & \overline{2x} \\ \hline -4x^2+1 & \end{array}$$

$$\Rightarrow f_3(x) = 2x + \underbrace{\frac{-4x^2+1}{x(x^2+2)}}_{g(x)}$$

Sur $g(x)$: ② Pôles : $1\ (1) \in \mathbb{R}$
couple $(1) \in \mathbb{R}$.

③ $g(x) = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B_1x+B_2}{x^2+2}$

④ g impaire $\Rightarrow B_2 = 0$

$A = \lim\limits_0 xg(x) = \lim\limits_0 \dfrac{-4x^2+1}{x^2+2} = \dfrac{1}{2}$

$\lim\limits_{+\infty} xg(x) = A + B_1 = -4 \Rightarrow B_1 = -9/2$.

$$\Rightarrow f_3(x) = 2x + \frac{1}{2x} - \frac{9}{2}\frac{x}{x^2+2}$$

$$\Rightarrow F_3(x) = K + x^2 + \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{9}{4}\ln(x^2+2)$$

4. Dans les exercices de cette section, cocher la méthode d'intégration choisie et calculer l'intégrale I. **Attention** : un changement de variable est proposé mais il peut ne pas constituer la méthode à utiliser (auquel cas il faut l'ignorer).

4.1. $I = \displaystyle\int_0^1 x \cdot \arctan(x)\, dx$ *(3 pt)*

❏ Forme immédiate	❏ Fraction rationnelle	☒ IPP	❏ Changement de variable $u = \arctan x$

$u' = x \to u = \dfrac{x^2}{2}$

$v' = \dfrac{1}{1+x^2} \leftarrow v = \arctan x$

$$\Rightarrow I = \left[\frac{x^2}{2}\arctan x\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx$$

$$\begin{array}{r|l} x^2 & x^2+1 \\ -1 & \overline{1} \end{array}$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_0^1 1\,dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$$

$$\Rightarrow I = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}[\arctan x]_0^1 = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8}$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} = I$$

4.2. $I = \displaystyle\int_1^e x^2 \ln(x)\, dx$ *(2 pt)*

❏ Forme immédiate	❏ Fraction rationnelle	☒ IPP	❏ Changement de variable $u = \ln x$

$u' = x^2 \to u = \dfrac{x^3}{3}$

$v' = \dfrac{1}{x} \leftarrow v = \ln x$

$$\Rightarrow I = \left[\frac{x^3}{3}\ln x\right]_1^e - \frac{1}{3}\int_1^e x^2 dx$$

$$I = \frac{e^3}{3}\ln e - \frac{1}{9}[x^3]_1^e = \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{1}{9} + \frac{2e^3}{9} = I$$

4.3. $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{2x+2}\,dx$ *(2 pt)*

☒ Forme immédiate	❑ Fraction rationnelle	❑ IPP	❑ Changement de variable $u = 2x+2$

$$I = \frac12 \int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x+1}\,dx = \frac12 \int_0^1 \underbrace{\frac{1}{x+1}}_{u'} \underbrace{\ln(x+1)}_{u}\,dx \Rightarrow u'u \to \frac{u^2}{2}$$

$$= \frac12 \left[\frac{\ln^2(x+1)}{2}\right]_0^1$$

$$I = \frac14 \ln^2(2)$$

4.4. $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{e^x+1}$ *(3 pt)*

❑ Forme immédiate	❑ Fraction rationnelle	❑ IPP	☒ Changement de variable $u = e^x$

① Élément → $\frac{du}{dx} = e^x = u \Rightarrow dx = \frac{du}{u}$

② Intégrande → $\frac{1}{e^x+1} = \frac{1}{u+1}$.

③ Bornes : x va de 0 à 1
u va de 1 à e

④ $I = \displaystyle\int_1^e \frac{du}{u(u+1)}$ On a $\frac{1}{u(u+1)}$ à découper.

On peut remarquer que $\frac{1}{u(u+1)} = \frac{u+1-u}{u(u+1)} = \frac1u - \frac{1}{u+1}$

$$\Rightarrow I = \int_1^e \frac1u\,du - \int_1^e \frac{1}{u+1}\,du = \big[\ln|u|\big]_1^e - \big[\ln|u+1|\big]_1^e$$

$$I = 1 - \ln(e+1) + \ln(2)$$

4.5. $I = \displaystyle\int_0^\pi x\cos(x)\sin(x)\,dx$ *(3 pt)*

❑ Forme immédiate	❑ Fraction rationnelle	☒ IPP	❑ Changement de variable $t = \cos x$

$u' = \cos(x)\sin(x) \longrightarrow u = \frac{\sin^2(x)}{2}$

$v' = 1 \longleftarrow v = x$

NB: on peut aussi remarquer que $\cos(x)\cdot\sin(x) = \frac{\sin(2x)}{2}$

$$\Rightarrow I = \underbrace{\left[\frac{x\sin^2 x}{2}\right]_0^\pi}_{=0} - \frac12\int_0^\pi \sin^2(x)\,dx = -\frac14\int_0^\pi 1\,dx + \frac14\int_0^\pi \cos(2x)\,dx$$

$\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$

$$I = -\frac14\big[x\big]_0^\pi + \frac14\left[\frac{\sin(2x)}{2}\right]_0^\pi = -\frac{\pi}{4} = I$$

Autre méthode: $u' = \frac12\sin(2x) \to u = -\frac14\cos(2x)$

$$\Rightarrow I = -\frac14\big[x\cos(2x)\big]_0^\pi + \int_0^\pi \frac{\cos(2x)}{4}\,dx$$

$$= -\frac{\pi}{4} + \frac18\big[\sin(2x)\big]_0^\pi = -\frac{\pi}{4} = I.$$

4.6. $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$ *(3 pt)*

❑ Forme immédiate	❑ Fraction rationnelle	❑ IPP	☒ Changement de variable $u = \frac{x}{2} - 1 \Rightarrow x = 2u+2$

$\frac{du}{dx} = \frac12 \Rightarrow dx = 2du$

$$\text{et } \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{8(u+1)-4(u+1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\cancel{8u}+8-4u^2-\cancel{8u}-4}} = \frac{1}{\sqrt{4-4u^2}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{1-u^2}}$$

Bornes: x va de 0 à 1
u va de -1 à $-\frac12$

$$\Rightarrow I = \int_{-1}^{-1/2} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du = \big[\arcsin(x)\big]_{-1}^{-1/2} = \left[-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right] = \frac{\pi}{3} = I$$

4.7. $I = \int_0^1 \frac{x^2-2}{(x+1)(x+2)}\,dx$ *(3 pt)*

❏ Forme immédiate	☒ Fraction rationnelle	❏ IPP	❏ Changement de variable $u = x^2$

$$\begin{array}{l|l} x^2 - 2 & x^2+3x+2 \\ \hline -(x^2+3x+2) & 1 \\ -3x-4 & \end{array}$$

$$\Rightarrow I = \underbrace{\int_0^1 1\,dx}_{1} - \int_0^1 \frac{3x+4}{(x+1)(x+2)}\,dx$$

$$g(x) = \frac{3x+4}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}$$

avec $A = \lim_{-1} (x+1)g(x) = \lim_{-1} \frac{3x+4}{x+2} = \frac{1}{1} = 1 = A$

$B = \lim_{-2} (x+2)g(x) = \lim_{-2} \frac{3x+4}{x+1} = \frac{-2}{-1} = 2 = B.$

$$\Rightarrow I = 1 - \int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx - \int_0^1 \frac{2}{x+2}\,dx = 1 + \left[\ln|x+1|\right]_0^1 + 2\left[\ln|x+2|\right]_0^2$$

$$\Rightarrow I = 1 - \ln(2) - 2\ln(3) + 2\ln(2) = 1 + \ln(2) - 2\ln(3) = I.$$

5. Après avoir précisé leurs natures, résoudre les équations différentielles suivantes :

5.1. $y' + \frac{2x}{x^2+1}y = 0$ *(2 pt)* (H)

Nature de l'équation différentielle : ED1LHV

$$\Rightarrow y(x) = K\exp\left(-\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx\right)$$

$$= K\exp\left[-\ln(x^2+1)\right] = K\exp\left(\ln \frac{1}{x^2+1}\right)$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{K}{x^2+1}$$

5.2. $y' - y = 4 + e^{-x} + \sin x$ *(4 pt)* (N)

Nature de l'équation différentielle : ED1LNC

① $y' - y = 0$ (H) $\Rightarrow y_H = Ke^x$

② On cherche $y_p = A + Be^{-x} + C\cos x + S\sin x$

$\Rightarrow y_p' = -Be^{-x} - C\sin x + S\cos x$

$\Rightarrow y_p' - y_p = -Be^{-x} - C\sin x + S\cos x - A - Be^{-x} - C\cos x - S\sin x$

$= -A - 2Be^{-x} + (S-C)\cos x - (S+C)\sin x$

$\overset{eq.}{=} 4 + e^{-x} + \sin x \Rightarrow \begin{cases} -A = 4 \Rightarrow A = -4 \\ -2B = 1 \Rightarrow B = -1/2 \\ S - C = 0 \\ S + C = -1 \end{cases} \Rightarrow S = C = -1/2$

$\rightarrow y_p = -4 - \frac{e^{-x}}{2} - \frac{\cos x}{2} - \frac{\sin x}{2}$

③ $y_N = Ke^x - 4 - \frac{e^{-x}}{2} - \frac{\cos x}{2} - \frac{\sin x}{2}$

5.3. $y' - 2y = \frac{x}{e^{-2x}(x+1)}$ *(3 pt)* (N)

Nature de l'équation différentielle : ED1LNC

① $y' - 2y = 0 \Rightarrow y_H = Ke^{2x}$

② Lagrange $\Rightarrow y_p = f(x)e^{2x} \Rightarrow y_p' = f'(x)e^{2x} + 2f(x)e^{2x}$

$\rightarrow$ On injecte dans (N)

$\Rightarrow f'(x)e^{2x} + \cancel{2f(x)e^{2x}} - \cancel{2f(x)e^{2x}} = f'(x)e^{2x} \overset{eq.}{=} \frac{x}{e^{-2x}(x+1)}$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{x\cancel{e^{-2x}}}{\cancel{e^{-2x}}(x+1)} = \frac{x}{x+1} = \frac{x+1-1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$

$\Rightarrow f(x) = x - \ln|x+1| \Rightarrow y_p(x) = \left[x - \ln|x+1|\right]e^{2x}.$

③ $y_N(x) = \left[K + x - \ln|x+1|\right]e^{2x}.$