Outils mathématiques 1 — Devoir surveillé **NOM :** C. Palermo. **Groupe :** **Note :**

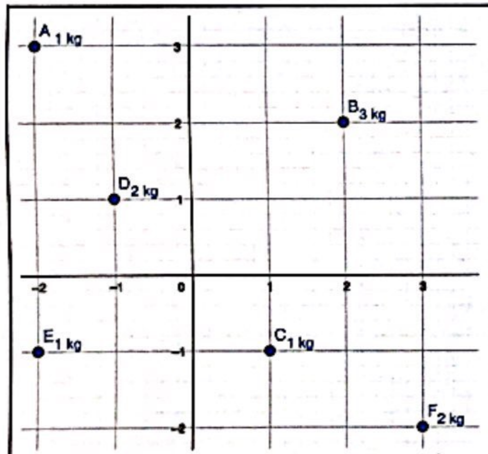
20 points, 90 minutes. Les questions sont indépendantes. Calculatrice collège et formulaire manuscrit A4 recto-verso autorisés. Répondre sur ce sujet.

1. Remplir le tableau ci-dessous en déterminant la forme exponentielle ou la forme algébrique des nombres complexes. *(1 pt)*

Forme algébrique	*Forme exponentielle*
$3\sqrt{\frac{3}{2}}+j\frac{3}{2}$	$\frac{3\sqrt{7}}{2}e^{j0,388}$ $=3,97e^{j22,2°}$
$\sqrt{2}\cdot(1-j)$	$2e^{-j\pi/4}$ $=2e^{-j45°}$
$4+3\cdot j$	$5e^{j0,644}$ $=5e^{j36,9°}$

Forme algébrique	*Forme exponentielle*
$1+j\sqrt{3}$	$2\exp\left(j\frac{\pi}{3}\right)$
$-0,6+0,8\cdot j$	$e^{j2,21}$ $=e^{j127°}$
$1-j$	$\sqrt{2}\cdot\exp\left(-j\frac{\pi}{4}\right)$

2. Déterminer les coordonnées du **barycentre** (centre de gravité) G du système de points représenté ci-dessous, le poids de chaque point étant précisé en indice. *(1 pt)*



$A_1(-2;3)$ $B_3(2;2)$ $C_1(1;-1)$

$D_2(-1;1)$ $E_1(-2;-1)$ $F_2(3;-2)$

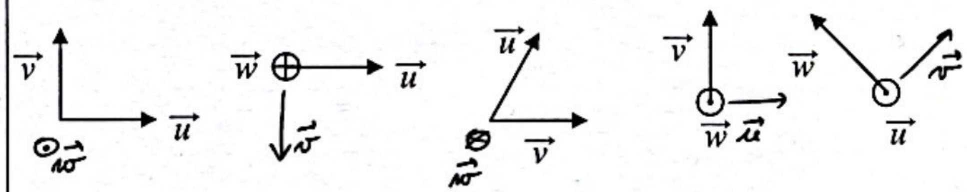
$x_G=\dfrac{-2+3\times2+1+2\times(-1)-2+2\times3}{10}$

$=7/10=0,7=x_G$

$y_G=\dfrac{3+3\times2-1+2\times1-1+2\times(-2)}{10}$

$=5/10=1/2=0,5=y_G$

3. Soient trois vecteurs de l'espace tels que $\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{v}$. Dans chacune des cinq figures ci-dessous, **dessiner** le vecteur manquant. *(1 pt)*



4. Soit la fonction f vérifiant les propriétés suivantes :

- $f(x)=0$ pour $x<\pi/5$;
- f est une fonction sinusoïdale, de période 3π, de valeur moyenne 3, d'amplitude 2, et maximale en $x=\pi/4$.

4.1. Donner **l'expression** de la fonction $f(x)$ *(1,5 pt)*

1ère possibilité : $f(x)=\theta(x-\frac{\pi}{5})\times\left[3+2\sin\left(\frac{2}{3}x-\varphi\right)\right]$

avec $\sin\left(\frac{2}{3}\times\frac{\pi}{4}-\varphi\right)=1=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow\varphi=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2}=-\frac{2\pi}{6}=-\frac{\pi}{3}$

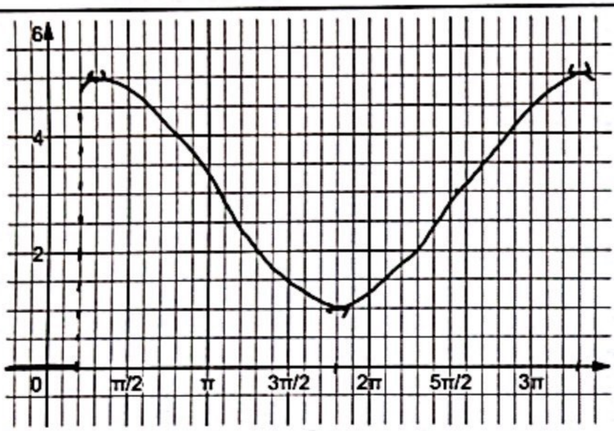
$\Rightarrow f(x)=\theta(x-\frac{\pi}{5})\left[3+2\sin\left(\frac{2}{3}x+\frac{\pi}{3}\right)\right]$

2ème possibilité : $f(x)=\theta(x-\frac{\pi}{5})\left[3+2\cos\left(\frac{2}{3}x-\varphi\right)\right]$

avec $\cos\left(\frac{2}{3}\times\frac{\pi}{4}-\varphi\right)=\cos 0\Rightarrow\varphi=\frac{\pi}{6}$

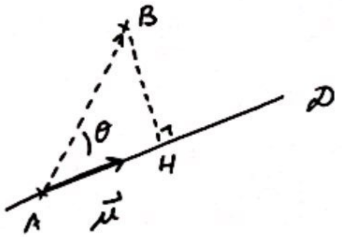
$\Rightarrow f(x)=\theta(x-\frac{\pi}{5})\left[3+2\cos\left(\frac{2}{3}x-\frac{\pi}{6}\right)\right]$

4.2. Faire un **tracé** succinct de la fonction *f*. *(0,5 pt)*



5. Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}; \vec{k})$, on considère : la droite $\mathscr{D}$ passant par le point $A(1; 1; 2)$ et de vecteur directeur $\vec{u} = (1; 2; 1)$; le point $B(3; 2; 2)$ et le plan Π d'équation $y + 3z - 3 = 0$.

5.1. Calculer la **distance** entre le point B et la droite $\mathscr{D}$; *(1,5 pt)*



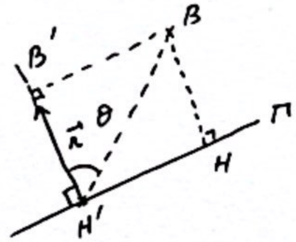
$$d = BH$$
$$= AB|\sin\theta|$$
$$= \frac{\|\vec{AB}\|\cdot\|\vec{u}\|\cdot|\sin\theta|}{\|\vec{u}\|}$$
$$= \frac{\|\vec{AB}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$$

$$\vec{AB}\wedge\vec{u} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix} \rightarrow \|\vec{AB}\wedge\vec{u}\| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$$

$$\rightarrow d = \sqrt{\frac{14}{6}} = \sqrt{\frac{7}{3}} \simeq 1{,}53\ u.$$

5.2. Calculer la **distance** entre le point B et le plan Π ; *(1,5 pt)*



$$d = BH = B'H' = H'B\,|\cos\theta|$$
$$d = \frac{\|\vec{H'B}\|\cdot\|\vec{n}\|\cdot|\cos\theta|}{\|\vec{n}\|}$$
$$= \frac{|\vec{H'B}\cdot\vec{n}|}{\vec{n}} \quad \text{avec } \vec{n} = \begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$$

avec $H' \in \Pi$ → Je prends $x = 3$, $y = 0$, $z = 1$ → $\vec{H'B} = \begin{pmatrix}3-3\\2-0\\2-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$

$$\vec{H'B}\cdot\vec{n} = \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix} = 2+3 = 5 \quad \text{et } \|\vec{n}\| = \sqrt{10}$$

$$\rightarrow d = \frac{5}{\sqrt{10}} = 1{,}58\ u$$

5.3. Calculer le **volume** engendré par le trièdre $(\vec{u}; \vec{n}; \overrightarrow{BA})$, et préciser si ce **trièdre** est direct ou indirect. *(1 pt)*

$$[\vec{u}; \vec{n}; \vec{BA}] = [\vec{BA}; \vec{u}; \vec{n}] = -[\vec{AB}; \vec{u}; \vec{n}]$$
$$= -(\vec{AB}\wedge\vec{u})\cdot\vec{n}$$
$$= \begin{pmatrix}-1\\2\\-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix} = 2-9 = -7$$

On a donc : un volume $V = 7u^3$

un trièdre $[\vec{u}; \vec{n}; \vec{BA}]$ indirect.

6. À partir des variations des fonctions f et g reportées dans le tableau ci-dessous, **déterminer les variations** de $f \circ g$ et de $g \circ f$. *(2 pt)*

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f(x)$	0	↗			$+\infty$ ‖ 0	↗	$+\infty$
$g(x)$	0	↗	1	↘		↘	0
$f\circ g(x)$		↗	⋮	↘		↘	
$g\circ f(x)$	1	↘			0 ‖ 1	↘	0

Détails : $*$ $f\circ g$.

$f\circ g : \mathbb{R}^- \xrightarrow[\text{croissante}]{g}]0;1[\xrightarrow[\text{croissante}]{f} \mathbb{R}^+$ $\quad$ $f\circ g : \mathbb{R}^- \xrightarrow[\text{croissante}]{} \mathbb{R}^+$

$\mathbb{R}^+ \xrightarrow[\text{décroissante}]{g}]0;1[\xrightarrow[\text{croissante}]{f} \mathbb{R}^+$ $\quad$ $\mathbb{R}^+ \xrightarrow[\text{décroissante}]{} \mathbb{R}^+$

$*$ $g\circ f$

$g\circ f :]-\infty;1[\xrightarrow[\text{croissante}]{f} \mathbb{R}^+ \xrightarrow[\text{décroissante}]{g}]0;1[$

$g\circ f :]1;+\infty[\xrightarrow[\text{croissante}]{f} \mathbb{R}^+ \xrightarrow[\text{décroissante}]{g}]0;1[$

$g\circ f :]-\infty;1[\longrightarrow]0;1[$ décroissante

$]1;+\infty[\longrightarrow]0;1[$ décroissante

7. On rappelle que l'étude des branches infinies consiste à étudier l'ensemble de définition, les limites, les asymptotes éventuelles et les positions relatives. Etudier les branches infinies des deux fonctions ci-après. *(6 pt)*

7.1. Etudier les **branches infinies** de la fonction $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x+1}$

① $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-1\} =]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$

② Branches infinies à étudier : $+\infty$; $-\infty$ et -1.

[1] $\lim\limits_{+\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{x^2+2}{x+1} = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{x^2}{x} = +\infty$.

$m = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = 1 = m$

$p = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{x^2+2}{x+1} - x = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{x^2+2-x^2-x}{x^2+1} = -1 = p$.

D : $\boxed{y = x-1}$ est Asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

De plus $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{x^2+2}{x+1} - x + 1 = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{x^2+2-x^2-x+x+1}{x+1}$

$= \lim\limits_{+\infty} \dfrac{3}{x+1} = 0^+$ donc $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de D.

[2] On a $\lim\limits_{-\infty} f(x) = +\infty$ et D asymptote oblique aussi en $-\infty$. En revanche $\lim\limits_{-\infty} \dfrac{x^2+2}{x+1} - (x-1) = 0^-$

Donc D est au dessus de $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$.

[3] $\lim\limits_{-1} f(x) = \lim\limits_{-1} \dfrac{\overbrace{x^2+2}^{>0}}{\underbrace{x+1}_{\to 0}} \Rightarrow \lim\limits_{-1^-} f(x) = -\infty$.

$\lim\limits_{-1^+} f(x) = +\infty$.

$\boxed{D' : x = 1}$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$.

7.2. Etudier les **branches infinies** de la fonction $g(x) = \dfrac{x^2 + x\ln(x)}{x-1}$

① $D_g = \mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\} = \underset{\boxed{3}}{]0;1[} \cup \underset{\boxed{2}}{]1;+\infty[}$ $\boxed{1}$

$\boxed{1}$ $\lim\limits_{+\infty} g(x) = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{x^2+x\ln x}{x-1} = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{x^2\left(1+\frac{\ln x}{x}\right)}{x(1-1/x)}$

$= \lim\limits_{+\infty} x \dfrac{1+\overset{\to 0}{\frac{\ln x}{x}}}{1-\underset{\to 0}{\frac{1}{x}}} = +\infty .$

→ $m = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{g(x)}{x} = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{1+\frac{\ln x}{x}}{1-\frac{1}{x}} = 1$

→ $p = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{x^2+x\ln x}{x-1} - x = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{x^2+x\ln x - x^2+x}{x-1}$

$= \lim\limits_{+\infty} \dfrac{x(\ln x+1)}{x(1-1/x)} = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{\overset{\to +\infty}{\ln x+1}}{\underset{\to 1}{1-1/x}} = +\infty .$

En $+\infty$, pas d'Asymptote oblique mais une direction asymptotique $y = x$ (ou encore $m = 1$)

$\boxed{2}$ $\lim\limits_{1} g(x) = \lim\limits_{1} \dfrac{x^2+\overset{\to 0}{x\ln x}}{\underset{\to 0}{x-1}}$ >0

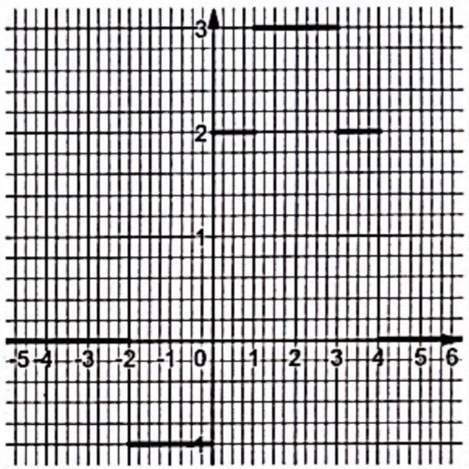
$\Rightarrow \lim\limits_{1^\pm} g(x) = \pm\infty$ $\Rightarrow$ D: $y = 1$ est asymptote verticale à C_g.

$\boxed{3}$ $\lim\limits_{0} g(x) = \lim\limits_{0} \dfrac{x^2+x\ln x}{x-1}$ or $\lim\limits_{0} x\ln x = 0$

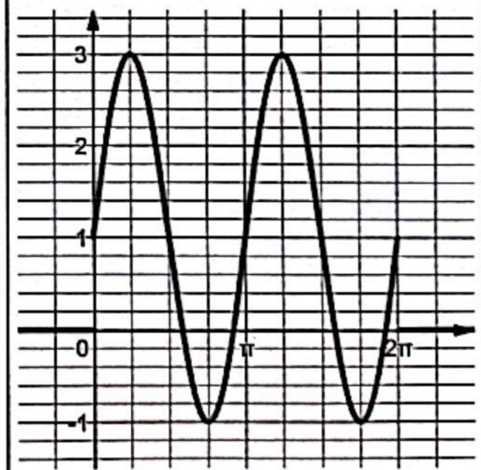
$= 0 .$

→ C_g tend vers le point d'origine.

8. Donner **les équations** des courbes représentées sur les figures reportées ci-dessous. *(3 pt)*

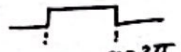


$f(x) = -\theta(x+2) + 3\theta(x) + \theta(x-1)$
$\quad -\theta(x-3) - 2\theta(x-4)$



On a une fonction sinusoïdale multipliée par une fenêtre

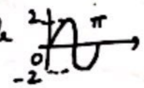
* la fenêtre :



$x=0$ $\quad x = 2\pi$

$[\theta(x) - \theta(x-2\pi)]$

* La fonction sinusoïdale



$1 + 2\sin(2x)$

→ $f(x) = [\theta(x) - \theta(x-2\pi)]\left(1+2\sin(2x)\right)$

Autre possibilité :

$f(x) = \theta(x).\theta(2\pi - x)\left(\underbrace{1+2\sin(2x)}_{}\right)$ ou $1+2\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$