TD d'outils mathématiques 1 — Test 1 — Octobre 2019

Merci de répondre directement et uniquement sur cette feuille. Durée : 20 min.

NOM : **GROUPE :** **NOTE :** /5

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 = 2 \cdot (\sqrt{3} - j)$ *(1 pt)*

$z = r e^{j\theta}$ avec $r > 0$ $\quad 2(\sqrt{3} - j)$ a pour module $2\sqrt{3+1} = 4$ et pour argument $-\pi/6$

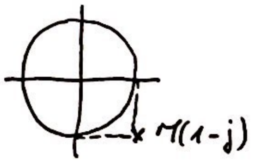
$$z^4 = 2(\sqrt{3} - j) \iff r^4 e^{j4\theta} = 4e^{-j\pi/6}$$

$$\iff \begin{cases} r^4 = 4 \text{ et } r > 0 \\ 4\theta = -\pi/6 \ [2\pi] \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r = \sqrt[4]{4} = \sqrt{2} \\ \theta = -\pi/24 \ [\pi/2] \end{cases}$$

$$\Rightarrow z_1 = \sqrt{2}\, e^{-j\pi/24}$$
$$z_2 = \sqrt{2}\, e^{j11\pi/24}$$
$$z_3 = \sqrt{2}\, e^{j23\pi/24}$$
$$z_4 = \sqrt{2}\, e^{j35\pi/24} = \sqrt{2}\, e^{-j13\pi/24}$$

2. Calculer $(1 - j)^{12}$ *(0,5 pt)*

$$(1-j) = \sqrt{2}\, e^{-j\pi/4} \rightarrow (1-j)^{12} = \left(\sqrt{2}\, e^{-j\pi/4}\right)^{12}$$



$$= (\sqrt{2})^{12} e^{-j12\pi/4}$$
$$= 64\, e^{-j3\pi} = \boxed{-64 = (1-j)^{12}}$$

3. Soient les points du plan $A(-3; -1)$, $B(1; -2)$ et $C(-2; 3)$.

(a) Montrer que le triangle ABC est isocèle et rectangle en un point que l'on précisera. *(1 pt)*

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 1 + 3 \\ -2 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{AC} = \begin{pmatrix} -2 + 3 \\ 3 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{BC} = \begin{pmatrix} -2 - 1 \\ 3 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

On remarque que $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$ donc $\vec{AB} \perp \vec{AC}$

$\rightarrow ABC$ rectangle en A.

De plus $\|\vec{AB}\| = \sqrt{\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}} = \sqrt{17} = \|\vec{AC}\| \rightarrow ABC$ isocèle.

(b) Déterminer l'aire du triangle ABC. *(0,5 pt)*

Soit $\mathcal{A}$ l'aire du triangle alors $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\left|\det(\vec{AB};\vec{AC})\right|$

$$= \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|17\right| = \boxed{8{,}5u^2 = \mathcal{A}}$$

(c) Déterminer l'équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}$ perpendiculaire à (BC) et passant par A, puis donner un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ *(1 pt)*

$$\mathcal{D} = \{M(x;y) \,/\, \vec{AM} \perp \vec{BC}\} = \{M(x;y) \,/\, \vec{AM}\cdot\vec{BC} = 0\}$$

avec $\vec{AM} = \begin{pmatrix} x+3 \\ y+1 \end{pmatrix}$ et $\vec{BC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \vec{AM}\cdot\vec{BC} = 0 = \begin{pmatrix} x+3 \\ y+1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} = -3(x+3)+5(y+1) = 0$$

$$-3x-9+5y+5 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{D}:\ -3x+5y-4=0}$$

$\vec{u} = (5;3)$ par exemple.

4. Dans l'espace, déterminer l'équation du plan Π formé par le point $D(1,2,1)$ et les vecteurs $\vec{u}(1;2;4)$ et $\vec{v} = (-1;-2;0)$. *(1 pt)*

$$\Pi = \{M(x;y;z) \,/\, \underbrace{[\vec{u};\vec{v};\vec{DM}] = 0}_{\text{vecteurs coplanaires}}\}$$

$$[\vec{u};\vec{v};\vec{DM}] = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}\cdot \quad 4\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z-1 \end{pmatrix} = 0$$

$$= 4\left[2x-2-y+2\right] = 0$$

$$\Rightarrow \Pi: \boxed{2x-y=0}$$