Outils mathématiques 2 – DS de janvier 19

Merci de répondre directement sur ce document de 4 pages. Aucune feuille supplémentaire ne sera acceptée.
Durée : 90 min. Calculatrice et formulaire A4 recto-verso manuscrit autorisés.

NOM : GROUPE : NOTE : /20

1. Prolonger par continuité la fonction $f(x) = \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{2}{1-x^2}$ en $x = 1$ *(1,5 pt)*

f n'est pas défini en $x=-1$ ni en $x=1$

$\lim_{1} f(x) = \lim_{1} \underbrace{\frac{1}{1-x}}_{\infty} - \underbrace{\frac{2}{1-x^2}}_{\infty}$ = FI de type $\infty - \infty$.

$= \lim_{1} \frac{1+x-2}{1-x^2} = \lim_{1} \frac{x-1}{1-x^2} = \text{« } \frac{0}{0} \text{ »} \to$ l'Hospital.

$= \lim_{1} \frac{1}{-2x} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ -1/2 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

(1) (0.5)

2. Soit $g(x) = \dfrac{\arcsin x}{x}$: *(3 pt)*

(a) Déterminer $\mathcal{D}_g$, l'ensemble de définition de g et préciser sa parité.

$\mathcal{D}g = [-1;0[\cup]0;1]$ (0.5)

Il s'agit d'une fonction impaire. (0.5)

(b) Déterminer $\tilde{g}$, le prolongement par continuité en 0 de g.

$\lim_{0} g(x) = \lim_{0} \frac{\overbrace{\arcsin x}^{\to 0}}{\underbrace{x}_{\to 0}} = \text{« } \frac{0}{0} \text{ »} \to$ l'Hospital

$= \lim_{0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2} \times 1} = 1 \Rightarrow \tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

(0.5) (0.5)

(c) Etudier la dérivabilité de $\tilde{g}$ en 0.

$\tilde{g}$ est-elle dérivable en 0 ? $\to \lim_{0} \frac{\tilde{g}(x) - \tilde{g}(0)}{x-0} = \lim_{0} \frac{\frac{\arcsin x}{x} - 1}{x}$

$= \lim_{0} \frac{\arcsin x - x}{x^2} = \text{« } \frac{0}{0} \text{ »} \to$ l'Hospital.

(1)

$= \lim_{0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1}{2x} = \text{« } \frac{0}{0} \text{ »} \to$ l'Hospital

$= \lim_{0} \frac{-\frac{1}{2}(1-x^2)^{-3/2}}{2} = -\frac{1}{4} = \tilde{g}'(0) \to \tilde{g}$ est dérivable en 0.

(b) $f_2(x) = \dfrac{7x-16}{(x-4)(x-2)(x-1)}$ ~~(1 pt)~~ (1,5 pt)

$$f_2(x) = \frac{A_1}{x-4} + \frac{A_2}{x-2} + \frac{A_3}{x-1}$$

avec $A_1 = \lim_{4} (x-4) f_2(x) = \lim_{4} \dfrac{7x-16}{(x-2)(x-1)} = \dfrac{28-16}{2 \times 3} = 2$

$A_2 = \lim_{2} (x-2) f_2(x) = \lim_{2} \dfrac{7x-16}{(x-4)(x-1)} = \dfrac{14-16}{-2 \times 1} = 1$

$A_3 = \lim_{1} (x-1) f(x) = \lim_{1} \dfrac{7x-16}{(x-4)(x-2)} = \dfrac{7-16}{-3 \times (-1)} = -3$

$\Rightarrow f_2(x) = \dfrac{2}{x-4} + \dfrac{1}{x-2} - \dfrac{3}{x-1} \Rightarrow F_2(x) = 2\ln|x-4| + \ln|x-2| - 3\ln|x-1| + k.$

(c) $f_3(x) = \dfrac{x^3 - x^2 + x - 3}{(x^2-1)(x^2+1)}$ ~~(2 pt)~~ (3pt)

$$f_3(x) = \frac{x^3 - x^2 + x - 3}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+1} + \frac{A_3 x + B_3}{x^2+1}$$

$A_1 = \lim_{1} (x-1) f_3(x) = \lim_{1} \dfrac{x^3 - x^2 + x - 3}{(x+1)(x^2+1)} = \dfrac{-2}{4} = -\dfrac{1}{2}$

$A_2 = \lim_{-1} (x+1) f_3(x) = \lim_{-1} \dfrac{x^3 - x^2 + x - 3}{(x-1)(x^2+1)} = \dfrac{-6}{-2 \times 2} = +\dfrac{3}{2}$ 2

$\lim_{+\infty} x f_2(x) = \lim_{+\infty} \dfrac{x^4 + \dots}{x^4 \dots} = 1 = A_1 + A_2 + A_3 \Rightarrow A_3 = 1 - A_1 - A_2 = 1 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2} = 0 = A_3$

$f_3(0) = 3 = -A_1 + A_2 + B_3 \Rightarrow B_3 = 3 + A_1 - A_2 = 3 - \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2} = 1 = B_3$

$\Rightarrow f_3(x) = -\dfrac{1}{2} \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{3}{2} \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x^2+1}$

1

$\Rightarrow F_3(x) = k - \dfrac{1}{2} \ln|x-1| + \dfrac{3}{2} \ln|x+1| + \arctan(x)$

5. Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(x^2+2)^3} dx$ *(1,5 pt)*

$f(x) = x(x^2+3)^{-3}$ $\quad n = -3$, $u = x^2+2$, $u' = 2x$

$u'u^n = 2x(x^2+2)^{-3} \Rightarrow f(x) = \dfrac{1}{2} u'u^n$

$\Rightarrow F(x) = \dfrac{1}{2} \dfrac{(x^2+2)^{-2}}{-2} = -\dfrac{1}{4(x^2+2)^2}$

$\Rightarrow \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(x^2+2)^3} = -\frac{1}{4}\left[\frac{1}{(x^2+2)^2}\right]_0^1 = -\frac{1}{4}\left[\frac{1}{9} - \frac{1}{4}\right] = -\frac{1}{4} \cdot \frac{-5}{36}$

$$\Rightarrow \boxed{I = \frac{5}{144}}$$

(b) $f_2(x) = \dfrac{7x-16}{(x-4)(x-2)(x-1)}$ ~~(1 pt)~~ (1,5 pt)

$$f_2(x) = \frac{A_1}{x-4} + \frac{A_2}{x-2} + \frac{A_3}{x-1}$$

avec $A_1 = \lim_{4} (x-4) f_2(x) = \lim_{4} \dfrac{7x-16}{(x-2)(x-1)} = \dfrac{28-16}{2\times 3} = 2$

$$A_2 = \lim_{2} (x-2) f_2(x) = \lim_{2} \frac{7x-16}{(x-4)(x-1)} = \frac{14-16}{-2\times 1} = 1$$

$$A_3 = \lim_{1} (x-1) f(x) = \lim_{1} \frac{7x-16}{(x-4)(x-2)} = \frac{7-16}{-3\times(-1)} = -3$$ 1

$\Rightarrow f_2(x) = \dfrac{2}{x-4} + \dfrac{1}{x-2} - \dfrac{3}{x-1} \Rightarrow F_2(x) = 2\ln|x-4| + \ln|x-2| - 3\ln|x-1| + k.$

0,5

(c) $f_3(x) = \dfrac{x^3 - x^2 + x - 3}{(x^2-1)(x^2+1)}$ ~~(2 pt)~~ (3 pt)

$$f_3(x) = \frac{x^3 - x^2 + x - 3}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+1} + \frac{A_3 x + B_3}{x^2+1}$$

$$A_1 = \lim_{1} (x-1) f_3(x) = \lim_{1} \frac{x^3 - x^2 + x - 3}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$A_2 = \lim_{-1} (x+1) f_3(x) = \lim_{-1} \frac{x^3 - x^2 + x - 3}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{-6}{-2\times 2} = +\frac{3}{2}$$ 2

$\lim_{+\infty} x f_2(x) = \lim_{+\infty} \dfrac{x^4 + \dots}{x^4 \dots} = 1 = A_1 + A_2 + A_3 \Rightarrow A_3 = 1 - A_1 - A_2 = 1 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2} = 0 = A_3$

$f_3(0) = 3 = -A_1 + A_2 + B_3 \Rightarrow B_3 = 3 + A_1 - A_2 = 3 - \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2} = 1 = B_3$

$$\Rightarrow f_3(x) = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{x-1} + \frac{3}{2}\,\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x^2+1}$$

1

$$\Rightarrow F_3(x) = k - \frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{3}{2}\ln|x+1| + \arctan(x)$$

5. Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(x^2+2)^3}\,dx$ *(1,5 pt)*

$f(x) = x(x^2+3)^{-3}$ $n = -3$ $u'u^n = 2x(x^2+2)^{-3} \Rightarrow f(x) = \dfrac{1}{2} u'u^n$

$u = x^2+2$

$u' = 2x$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{2}\,\frac{(x^2+2)^{-2}}{-2} = -\frac{1}{4(x^2+2)^2}$$ 1

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{x}{(x^2+2)^3} = -\frac{1}{4}\left[\frac{1}{(x^2+2)^2}\right]_0^1 = -\frac{1}{4}\left[\frac{1}{9} - \frac{1}{4}\right] = -\frac{1}{4}\cdot\frac{-5}{36}$$

$$\Rightarrow \boxed{I = \frac{5}{144}}$$ 0,5

(b) $\int_0^{\sqrt{\pi/2}} 4x\cos(x^2)dx$ *(1.5 pt)*

$u' = \cos(x)$

$v(x) = x^2 \Rightarrow v' \times u' \circ v = 2x \cdot \cos(x^2)$ donc $f(x) = 2 v' \times u' \circ v$

$v'(x) = 2x \Rightarrow F(x) = 2 u \circ v(x) = 2\sin(x^2)$

$\Rightarrow I = \left[2\sin(x^2) \right]_0^{\sqrt{\pi/2}} = 2 \sin \frac{\pi}{2} = \boxed{2 = I}$.

6. Dériver les fonctions suivantes :

(a) $h_1(x) = \exp[\sqrt{x^3 - 1}]$ *(1 pt)*

$h_1(x) = u \circ v \circ w$

$u(x) = e^x \quad u'(x) = e^x$

$v(x) = \sqrt{x} \quad v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$w(x) = x^3 - 1 \quad w' = 3x^2$

$h_1' = w' \times v' \circ w \times u' \circ v \circ w$

$\Rightarrow h_1'(x) = 3x^2 \times \frac{1}{2\sqrt{x^3 - 1}} \times \exp \sqrt{x^3 - 1}$

(b) $h_2(x) = \arccos(x^2 + 1)$ *(1 pt)*

$h_2(x) = u \circ v$

$u(x) = \arccos x \quad u'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$

$v(x) = x^2 + 1 \quad v'(x) = 2x$

$u \circ v' = v' \times u' \circ v$

$h_2'(x) = 2x \times \frac{-1}{\sqrt{1 - (x^2+1)^2}}$

$\Rightarrow h_2'(x) = \frac{-2x}{\sqrt{1 - x^4 - 2x^2 - 1}} = \frac{-2x}{\sqrt{-x^4 - 2x^2}}$

7. Sur quel(s) intervalle(s) la fonction $f(x) = \ln(1 + x + x^2)$ admet-t-elle une bijection réciproque ? *(1.5 pt)*

$f'(x) = \frac{2x + 1}{1 + x + x^2}$ avec $sg(f'(x)) = sg(2x + 1)$ car $x^2 + x + 1$ ne change pas de signe.

x	$-\infty$		$-1/2$		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\ln(3/4)$	$\nearrow$	$+\infty$

$\ln\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = \ln\left(\frac{3}{4}\right)$

f admet une réciproque là où elle est bijective, c'est-à-dire sur $\left]-\infty ; -\frac{1}{2}\right]$ ou sur $\left[-\frac{1}{2} ; +\infty\right[$.