
Outils mathématiques 1 – DS de novembre 18

Merci de répondre directement et uniquement sur ce document de 4 pages. Durée : 90 min.
Calculatrice et formulaire A4 recto-verso manuscrit autorisés.

NOM :

GROUPE :

NOTE :

/20

1. Calculer $(1 + j)^8$ (0,5 pt)

2. Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, on donne les points $A(2; 1; -1)$, $B(3; 2; -4)$, et $C(1; -1; 3)$.

(a) Calculer l'aire du triangle ABC . (1 pt)

(b) Déterminer des équations paramétriques de la droite (BC) . (1 pt)

(c) Déterminer la distance entre le point C et la droite (AB) . (1pt)

(d) Déterminer les coordonnées d'un vecteur \vec{u} perpendiculaire au triangle ABC et unitaire. (1 pt)

3. Déterminer les coordonnées du centre de symétrie Ω de la courbe \mathcal{C} d'équation $f_1(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 8x - \frac{1}{3}$.
On pourra s'aider d'un graphe. (1 pt)

4. Développer et réduire l'expression $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$ et en déduire l'ensemble de définition de $f_2(x) = \ln(x^3 - 27)$. (1 pt)

5. Déterminer l'intervalle d'étude minimal I de $f_3(x) = \cos^2(8x)$. (1 pt)

6. Soient f et g deux fonctions définies et continues sur \mathbb{R} . f est une fonction paire décroissante sur \mathbb{R}_+ et g est une fonction impaire, décroissante et négative sur \mathbb{R}_+ . En vous aidant d'un tableau de variation (que vous présenterez obligatoirement), déterminer le sens de variation de $f \circ g$ sur \mathbb{R} . (2 pt)

• **Attention** — On rappelle que l'étude des branches infinies implique la détermination : de l'ensemble de définition ; des équations des éventuelles asymptotes ; et, s'il y a lieu, des positions relatives.

7. Étudier les branches infinies de la fonction $f_4(x) = x + 1 + \sqrt{x + 1}$ (1,5 pt)

8. Étudier les branches infinies de la fonction $f_5(x) = \frac{x^2 \ln(x) - x}{x + 1}$ (2 pt)

9. Étudier les branches infinies de la fonction $f_6(x) = \frac{2x^3 + x - 3}{x^2 - 2}$ (3 pt)

• Dans la suite de ce DS, on note $\theta(x)$ la fonction de Heaviside.

10. Parmi les fonctions suivantes : **encercler** les fonctions paires, **encadrer** les fonctions impaires, et **barrer** celles qui ne sont ni paires ni impaires. (2 pt)

$$\frac{x^2 - 2}{x^3 + x} \quad ; \quad x^2 - \frac{1}{x} \quad ; \quad x^2 - \frac{1}{x^3} \quad ; \quad x^3 + \frac{1}{x} \quad ; \quad \frac{\sin x}{1 - \tan^2 x} \quad ; \quad \frac{x^3 + x}{x - 1} \quad ; \quad \theta(1+x) + \theta(1-x)$$

$$\frac{x^2 - 1}{x^4 + 1} \quad ; \quad \frac{\sin(2x)}{1 + x^2} \quad ; \quad \frac{\sin(x^2)}{1 + x^2} \quad ; \quad \frac{\sin(x)}{1 + x} \quad ; \quad \ln(x^2 + 1) \quad ; \quad x \exp(x^2) \quad ; \quad \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

11. Dans la zone quadrillée ci-dessous, pour $x \in [-3; 6]$, donner l'allure des graphes \mathcal{C}_F et \mathcal{C}_G des deux fonctions : (2 pt)

— $F(x) = \theta(x - 2) \cdot [1 + 2 \cos(x - 2)]$;

— $G(x) = \theta(x + 2) + 3\theta(x + 1) - \theta(x) - 2\theta(x - 1) - \theta(x - 2)$

Afin de les reconnaître, on précisera le nom des courbes.

