Outils mathématiques 1 – DS de novembre 18

Merci de répondre directement et uniquement sur ce document de 4 pages. Durée : 90 min.
Calculatrice et formulaire A4 recto-verso manuscrit autorisés.

NOM : GROUPE : NOTE : /20

1. Calculer $(1+j)^8$ *(0,5 pt)*

$1+j = \sqrt{2}\, e^{j\pi/4} \Rightarrow (1+j)^8 = (\sqrt{2})^8 e^{j8\pi/4} = 16.$

2. Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, on donne les points $A(2;1;-1)$, $B(3;2;-4)$, et $C(1;-1;3)$.

   (a) Calculer l'aire du triangle ABC. *(1 pt)*

Soit $\mathcal{A}$ l'aire recherchée. $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\|\vec{AB}\wedge\vec{AC}\|$ avec $\vec{AB} = \begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{AC} = \begin{pmatrix}-1\\-2\\4\end{pmatrix}$

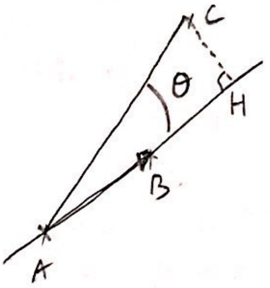
$\vec{AB}\wedge\vec{AC} = \begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-1\\-2\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-1\\-1\end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{A} = \frac{1}{2}\sqrt{6} \simeq \boxed{1{,}22\ u^2.}$

   (b) Déterminer des équations paramétriques de la droite (BC). *(1 pt)*

$(BC) = \{M(x;y;z) / \vec{BM} = t\vec{BC}\}$ avec $\vec{BM} = \begin{pmatrix}x-3\\y-2\\z+4\end{pmatrix}$ $\vec{BC} = \begin{pmatrix}-2\\-3\\7\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = -2t+3 \\ y = -3t+2 \\ z = 7t-4 \end{cases}$

   (c) Déterminer la distance entre le point C et la droite (AB). *(1pt)*



$d = CH = AC|\sin\theta| = \frac{\|\vec{AC}\wedge\vec{AB}\|}{\|\vec{AB}\|} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{11}} = \sqrt{\frac{6}{11}} \simeq \boxed{0{,}739\ u}$

$\rightarrow \|\vec{AC}\wedge\vec{AB}\| = \sqrt{6}$

$\|\vec{AB}\| = \sqrt{11}.$

   (d) Déterminer les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ perpendiculaire au triangle ABC et unitaire. *(1 pt)*

$\vec{u} = k.\ \vec{AB}\wedge\vec{AC} = k\begin{pmatrix}-2\\-1\\-1\end{pmatrix}$

On veut que $\|\vec{u}\| = 1 \Rightarrow |k|.\sqrt{6} = 1 \Rightarrow k = \pm\sqrt{6}/6.$

On prend donc $\vec{u} = \frac{\sqrt{6}}{6}\begin{pmatrix}-2\\-1\\-1\end{pmatrix}$ ou bien $\vec{u} = -\frac{\sqrt{6}}{6}\begin{pmatrix}-2\\-1\\-1\end{pmatrix}$

3. Déterminer les coordonnées du centre de symétrie Ω de la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $f_1(x) = \dfrac{x^3}{3} - x^2 - 8x - \dfrac{1}{3}$. On pourra s'aider d'un graphe. *(1 pt)*

On cherche x_1 et x_2 en dérivant f_1 et en l'annulant.

$f_1'(x) = x^2 - 2x - 8 \qquad \Delta = 4 + 32 = 36 = 6^2$

$\Rightarrow x_1 = \dfrac{2-6}{2} = -2 \qquad x_2 = \dfrac{2+6}{2} = 4$

$\Rightarrow \alpha = \dfrac{x_1 + x_2}{2} = 1 \Rightarrow \beta = f_1(1) = \cancel{\tfrac{1}{3}} - 1 - 8 - \cancel{\tfrac{1}{3}} = -9$

$\Rightarrow \boxed{\Omega(1;-9)}$

4. Développer et réduire l'expression $(a-b)(a^2+ab+b^2)$ et en déduire l'ensemble de définition de $f_2(x) = \ln(x^3 - 27)$. *(1 pt)*

$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$

$\Rightarrow f_2(x) = \ln\left[(x-3)\underbrace{(x^2+3x+9)}_{\text{toujours positif}}\right]$

$\Rightarrow f_2$ définie $\Leftrightarrow x > 3 \Rightarrow \boxed{\mathcal{D}_2 =]3;+\infty[}$

5. Déterminer l'intervalle d'étude minimal I de $f_3(x) = \cos^2(8x)$. *(1 pt)*

$f_3(x) = \cos^2(8x) = \dfrac{1+\cos(16x)}{2}$ fonction paire et $\pi/8$-périodique

$\Rightarrow I = \mathbb{R} \cap \mathbb{R}^+ \cap [-\pi/16 ; \pi/16] = \boxed{[0;\pi/16] = I}$

6. Soient f et g deux fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}$. f est une fonction paire décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et g est une fonction impaire, décroissante et négative sur $\mathbb{R}_+$. En vous aidant d'un tableau de variation (que vous présenterez obligatoirement), déterminer le sens de variation de $f \circ g$ sur $\mathbb{R}$. *(2 pt)*

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		↗		↘	
g		↘	0	↘	
$f\circ g$		↗		↘	

← l'intervalle d'arrivée de f n'est pas connu. On le nomme J.

Justification: $\begin{cases} \mathbb{R}^+ \xrightarrow[\text{décroissante}]{g} \mathbb{R}^- \xrightarrow[\text{croissante}]{f} J \rightarrow f\circ g \text{ décroissante sur } \mathbb{R}^+ \\ \mathbb{R}^- \xrightarrow[\text{décroissante}]{g} \mathbb{R}^+ \xrightarrow[\text{décroissante}]{f} J \rightarrow f\circ g \text{ croissante sur } \mathbb{R}^- \end{cases}$

• ***Attention*** — *On rappelle que l'étude des branches infinies implique la détermination : de l'ensemble de définition ; des équations des éventuelles asymptotes ; et, s'il y a lieu, des positions relatives.*

7. Étudier les branches infinies de la fonction $f_4(x) = x + 1 + \sqrt{x+1}$ *(1,5 pt)*

① $D_4 = \{x / x+1 \geq 0\} = [-1; +\infty[$ 0^{50}

② En $+\infty$: $\lim_{+\infty} f_4(x) = +\infty$ → on recherche une A.O.

$m = \lim_{+\infty} \frac{f_4(x)}{x} = \lim_{+\infty} \frac{x+1+\sqrt{x+1}}{x} \approx \lim_{+\infty} \frac{x}{x} = \boxed{1 = m}$ 0^{50}

$p = \lim_{+\infty} f_4(x) - x = \lim_{+\infty} 1 + \sqrt{x+1} = +\infty$ ⇒ Pas d'asymptote MAIS une direction asymptotique $y = x$. 0^{50}

8. Étudier les branches infinies de la fonction $f_5(x) = \frac{x^2 \ln(x) - x}{x+1}$ *(2 pt)*

① $D_5 = \{x \in \mathbb{R} / x > 0 \text{ et } x \neq -1\} =]0; +\infty[$ 0^{50}

② en $+\infty$: $\lim_{+\infty} f_4(x) = \lim_{+\infty} \frac{x^2 \ln x - x}{x+1} = \lim_{+\infty} \frac{x^2(\ln x - 1/x^2)}{x(1+1/x)} = +\infty$ 1^{00}

$m = \lim_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{+\infty} \frac{\cancel{x^2}(\ln x - 1/x^2)}{\cancel{x^2}(1+1/x)} = +\infty$ ⇒ Branche parabolique de direction (Oy)

③ En 0 : $\lim_{0} f_4(x) = \lim_{0} \frac{\overbrace{x^2 \ln x}^{\to 0} - x}{\underbrace{x+1}_{\to 1}} = 0$ ⇒ Pas d'asymptote : la courbe se rapproche de l'origine. 0^{50}

9. Étudier les branches infinies de la fonction $f_6(x) = \frac{2x^3 + x - 3}{x^2 - 2}$ *(3 pt)*

① $D_6 = \mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{2}\}$ ← 0^{50}

② En $\pm\infty$ $\lim_{\pm\infty} f_6(x) = +\infty$ → Recherche d'A.O. $m = \lim_{\pm\infty} \frac{f_6(x)}{x} = \lim_{\pm\infty} \frac{2x^3+x-3}{x^3-2x} = 2 = m$

1 → $p = \lim_{\pm\infty} f_6(x) - 2x = \lim_{\pm\infty} \frac{\cancel{2x^3}+x-3-\cancel{2x^3}+4x}{x^2-2} = \lim_{\pm\infty} \frac{5x-3}{x^2-2} = 0^{\pm}$

$\mathcal{C}_6$ admet $D : y = 2x$ comme A.O. en $\pm\infty$.

0^{50} → De plus : $\mathcal{C}_6$ est au dessus de D en $+\infty$ et D est au-dessus de $\mathcal{C}_6$ en $-\infty$.

③ En $\sqrt{2}$ on a $\lim_{\sqrt{2}} f_6(x)$ → $\lim_{\sqrt{2}^+} \frac{\overbrace{2x^3+x-3}^{>0}}{\underbrace{x^2-2}_{0^+}} = +\infty$

à l'extérieur des racines.

→ $\lim_{\sqrt{2}^-} f_6(x) = -\infty$

} $D_1 : x = \sqrt{2}$ est A V à $\mathcal{C}_6$. 1

En $-\sqrt{2}$ on a $\lim_{-\sqrt{6}} f(x)$ → $\lim_{-\sqrt{2}^+} \frac{\overbrace{2x^3+x-3}^{<0}}{\underbrace{x^2-2}_{0^-}} = +\infty$.

→ $\lim_{-\sqrt{2}^-} f_6(x) = -\infty$

} $D_2 : x = -\sqrt{2}$ est A.V à $\mathcal{C}_6$.

• ***Dans la suite de ce DS,*** *on note $\theta(x)$ la fonction de Heaviside.*

10. Parmi les fonctions suivantes : **encercler** les fonctions paires, **encadrer** les fonctions impaires, et **barrer** celles qui ne sont ni paires ni impaires. *(2 pt)*

$$\boxed{\frac{x^2-2}{x^3+x}}\ ;\quad x^2-\left(\frac{1}{x}\right)^2\ ;\quad \cancel{x^2-\frac{1}{x^3}}\ ;\quad \boxed{x^3+\frac{1}{x}}\ ;\quad \boxed{\frac{\sin x}{1-\tan^2 x}}\ ;\quad \cancel{\frac{x^3+x}{x-1}}\ ;\quad \theta(1+x)+\theta(1-x)$$

p

$$\frac{x^2-1}{x^4+1}\ ;\quad \boxed{\frac{\sin(2x)}{1+x^2}}\ ;\quad \frac{\sin(x^2)}{1+x^2}\ ;\quad \cancel{\frac{\sin(x)}{1+x}}\ ;\quad \ln(x^2+1)\ ;\quad \boxed{x\exp(x^2)}\ ;\quad \frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

11. Dans la zone quadrillée ci-dessous, pour $x \in [-3;6]$, donner l'allure des graphes $\mathcal{C}_F$ et $\mathcal{C}_G$ des deux fonctions : *(2 pt)*

— $F(x) = \theta(x-2)\cdot[1+2\cos(x-2)]$;

— $G(x) = \theta(x+2) + 3\theta(x+1) - \theta(x) - 2\theta(x-1) - \theta(x-2)$

Afin de les reconnaître, on précisera le nom des courbes.