Outils mathématiques 1 – DS mi-semestre – Octobre 18

Merci de répondre directement et uniquement sur cette feuille. Durée : 45 min.
Calculatrice et formulaire A4 recto-verso manuscrit autorisés.

NOM : PALERMO GROUPE : NOTE : /10

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^5 = -64$. *(1 pt)*

Il y a 5 solutions. $z^5 = -64 \Leftrightarrow r^5 e^{j5\theta} = 64 e^{j\pi} \Leftrightarrow \begin{cases} r^5 = 64 \text{ avec } r > 0 \\ 5\theta = \pi [2\pi] \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[5]{64} \\ \theta = \frac{\pi}{5} [\frac{2\pi}{5}] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = \sqrt[5]{64} e^{j\pi/5} \\ z_2 = \sqrt[5]{64} e^{j3\pi/5} \\ z_3 = \sqrt[5]{64} e^{j\pi} = -\sqrt[5]{64} \\ z_4 = \sqrt[5]{64} e^{j7\pi/5} = \sqrt[5]{64} e^{-j3\pi/5} \\ z_5 = \sqrt[5]{64} e^{j9\pi/5} = \sqrt[5]{64} e^{-j\pi/5} \end{cases}$

2. Déterminer l'équation cartésienne de l'image par la similitude de centre O, d'angle $-\pi/4$ et de rapport 2 du cercle $\mathcal{C}$ de centre $A(1;1)$ et de rayon 3. *(1,5 pt)*

$\mathcal{C} = \{M(z) \,/\, z = 1 + j + 3e^{j\theta} \quad \theta \in [0; 2\pi]\}$ soit $\mathcal{C}'$ l'image de $\mathcal{C}$ par $S(0; -\frac{\pi}{4}; 2)$

alors $\mathcal{C}' = \{M(z') / z' = 2e^{-j\pi/4} \cdot z\}$ $z' = 2e^{-j\pi/4}(1+j) + 3 \times 2e^{-j\pi/4} e^{j\theta}$

$z' = \sqrt{2}(1-j)(1+j) + 6e^{j(\theta - \pi/4)}$

$= 2\sqrt{2} + 6e^{j(\theta - \pi/4)}$ avec $\theta \in [0; 2\pi]$ $\Rightarrow \mathcal{C}' = \{M(x;y) / \underline{(x - 2\sqrt{2})^2 + y^2 = 36}\}$

3. Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on donne $A(1;1)$, $B(2;4)$ et $C(3;-2)$.

(a) Déterminer l'équation de la médiatrice de $[AB]$. *(1 pt)*

Soit I le milieu de $[AB]$ alors I a pour coordonnées $I\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$

Soit D la médiatrice recherchée : $D = \{M(x;y) / \vec{IM} \cdot \vec{AB} = 0\}$ avec $\vec{IM} = \left(x - \frac{3}{2}; y - \frac{5}{2}\right)$

$\vec{AB} = (1; 3)$

$\vec{IM} \cdot \vec{AB} = 0 = \begin{pmatrix} x - 3/2 \\ y - 5/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = x - \frac{3}{2} + 3y - \frac{15}{2} = 0$

$\Rightarrow \boxed{D : x + 3y - 9 = 0}$ ou $\boxed{y = -\frac{x}{3} + 3}$

(b) Calculer l'aire du triangle ABC en précisant s'il est direct ou indirect. *(0,5 pt)*

$\mathcal{A} = \frac{1}{2} |\det(\vec{AB}; \vec{AC})|$ avec $\det(\vec{AB}; \vec{AC}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -3 - 6 = -9$

$\Rightarrow \boxed{\mathcal{A} = 4,5\ u^2}$ et le triangle est <u>indirect</u> car $\det(\vec{AB}; \vec{AC}) < 0$.

(c) Déterminer les coordonnées du barycentre de ABC avec des poids de 2 kg en A, 3 kg en B et 0,5 kg en C. *(0,5 pt)*

Soit G le barycentre alors $x_G = \frac{2x_A + 3x_B + 0,5x_C}{5,5} = \frac{2 + 6 + 1,5}{5,5} = \frac{9,5}{5,5} = \frac{19}{11}$

$y_G = \frac{2 + 12 - 1}{5,5} = \frac{13}{5,5} = \frac{26}{11}$

$\Rightarrow \boxed{G\left(\frac{19}{11}; \frac{26}{11}\right)}$

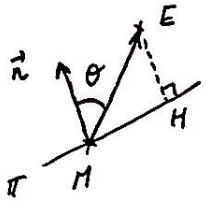
4. Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, on donne les points $D(2;1;-1)$, $E(3;2;-4)$, $F(1;-1;3)$ et le vecteur $\vec{n}(1;-1;2)$.

(a) Déterminer l'équation du plan Π passant par D et de vecteur normal $\vec{n}$. *(0,5 pt)*

Soit $M \in \Pi$ alors $\overrightarrow{DM} \cdot \vec{n} = 0$ avec $\overrightarrow{DM} = \begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \\ z+1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \\ z+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 = x-2-y+1+2z+2 = \boxed{x-y+2z+1=0}$$

(b) Déterminer la distance entre le point E et le plan Π *(1,5 pt)*



$d = EH = ME \cos\theta = \dfrac{|\overrightarrow{ME} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$ avec $M \in \Pi \Rightarrow M(0;1;0)$

$\rightarrow \overrightarrow{ME}(3;1;-4)$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{ME} \cdot \vec{n}| = \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = |3-1-8| = |-6| = 6$$

$$\|\vec{n}\| = \sqrt{1+1+2^2} = \sqrt{6} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6} \simeq \boxed{2{,}45\ u = d}$$

(c) Calculer le volume du parallélépipède engendré par le trièdre $(\vec{DE}, \vec{DF}, \vec{n})$ et préciser si le trièdre est direct ou indirect. *(1,5 pt)*

$\mathcal{V} = |[\overrightarrow{DE}; \overrightarrow{DF}; \vec{n}]|$ avec $\overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DF} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$[\overrightarrow{DE}; \overrightarrow{DF}; \vec{n}] = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = 6-9 = -3$$

$\Rightarrow$ $\underline{\mathcal{V} = 3u^3}$ et le trièdre $(\overrightarrow{DE}; \overrightarrow{DF}; \vec{n})$ est <u>indirect</u> (signe $-$).

5. Déterminer l'équation de la fonction causale f ayant les propriétés suivantes : *(1,5 pt)*

— f est sinusoïdale, d'amplitude 4, de composante continue 2, π−périodique et maximale en $\pi/3$;

— $f(x) = 0$ si $x < \pi/4$.

$f(x) = \Theta(x - \frac{\pi}{4}) \left[2 + 4 \sin(2x - \varphi) \right]$

composante continue — amplitude — π périodique

Recherche de φ : $\varphi /\ \sin(2 \cdot \frac{\pi}{3} - \varphi) = 1$

$\Rightarrow \quad \frac{2\pi}{3} - \varphi = \frac{\pi}{2} \rightarrow \varphi = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = \Theta(x - \tfrac{\pi}{4}) \left[2 + 4 \sin(2x - \tfrac{\pi}{6}) \right]}$$

Autre possibilité : $f(x) = \Theta(x - \frac{\pi}{4}) \left[2 + 4 \cos(2x - \frac{2\pi}{3}) \right]$

6. Déterminer l'axe de symétrie de la courbe $\mathcal{C}_g$ d'équation $g(x) = x^2 + x + 1$. *(0,5 pt)*

Allure de la courbe :

l'axe passe par le minimum local

$g'(x) = 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1/2$

$\Rightarrow \Sigma = \{ M(x;y) \,/\, x = -1/2 \}$