

NOM : *PALERO*

GROUPE :

NOTE :

/10

1. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^5 = -64$. (1 pt)

Il y a 5 solutions. $z^5 = -64 \Leftrightarrow r^5 e^{j5\theta} = 64 e^{j\pi} \Leftrightarrow \begin{cases} r^5 = 64 \text{ avec } r > 0 \\ 5\theta = \pi + 2n\pi \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[5]{64} \\ \theta = \frac{\pi}{5} \left[\frac{2n}{5} \right] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = \sqrt[5]{64} e^{j\pi/5} \\ z_2 = \sqrt[5]{64} e^{j3\pi/5} \\ z_3 = \sqrt[5]{64} e^{j\pi} = -\sqrt[5]{64} \\ z_4 = \sqrt[5]{64} e^{j7\pi/5} = \sqrt[5]{64} e^{-j3\pi/5} \\ z_5 = \sqrt[5]{64} e^{j9\pi/5} = \sqrt[5]{64} e^{-j\pi/5} \end{cases}$

2. Déterminer l'équation cartésienne de l'image par la similitude de centre O , d'angle $-\pi/4$ et de rapport 2 du cercle C de centre $A(1; 1)$ et de rayon 3. (1,5 pt)

$\mathcal{C} = \{M(z) \mid z = 1+j + 3e^{j\theta} \quad \theta \in [0; 2\pi]\}$ soit \mathcal{C}' l'image de \mathcal{C} par $S(0; -\pi/4; 2)$

alors $\mathcal{C}' = \{M'(z') \mid z' = 2e^{-j\pi/4} \cdot z\}$ $z' = 2e^{-j\pi/4} (1+j) + 3 \times 2e^{-j\pi/4} e^{j\theta}$

$z' = \sqrt{2}(1-j)(1+j) + 6e^{j(\theta-\pi/4)}$
 $= 2\sqrt{2} + 6e^{j(\theta-\pi/4)}$ avec $\theta \in [0; 2\pi]$ $\Rightarrow \mathcal{C}' = \{M(x,y) \mid (x-2\sqrt{2})^2 + y^2 = 36\}$

3. Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on donne $A(1; 1)$, $B(2; 4)$ et $C(3; -2)$.

(a) Déterminer l'équation de la médiatrice de $[AB]$. (1 pt)

Soit I le milieu de $[AB]$ alors I a pour coordonnées $I\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$

Soit D la médiatrice recherchée: $D = \{M(x,y) \mid \vec{IM} \cdot \vec{AB} = 0\}$ avec $\vec{IM} = \left(x - \frac{3}{2}; y - \frac{5}{2}\right)$
 $\vec{AB} = (1; 3)$

$\vec{IM} \cdot \vec{AB} = 0 = \begin{pmatrix} x - 3/2 \\ y - 5/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = x - \frac{3}{2} + 3y - \frac{15}{2} = 0$ $\Rightarrow \boxed{D: x + 3y - 9 = 0}$ ou $\boxed{y = -\frac{x}{3} + 3}$

(b) Calculer l'aire du triangle ABC en précisant s'il est direct ou indirect. (0,5 pt)

$A = \frac{1}{2} \left| \det(\vec{AB}; \vec{AC}) \right|$ avec $\det(\vec{AB}; \vec{AC}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -3 - 6 = -9$

$\Rightarrow \boxed{A = 4,5 \text{ u}^2}$ et le triangle est indirect car $\det(\vec{AB}; \vec{AC}) < 0$.

(c) Déterminer les coordonnées du barycentre de ABC avec des poids de 2 kg en A , 3 kg en B et 0,5 kg en C . (0,5 pt)

Soit G le barycentre alors $x_G = \frac{2x_A + 3x_B + 0,5x_C}{5,5} = \frac{2 + 6 + 1,5}{5,5} = \frac{9,5}{5,5} = \frac{19}{11}$

$y_G = \frac{2 + 12 - 1}{5,5} = \frac{13}{5,5} = \frac{26}{11}$

$\Rightarrow \boxed{G\left(\frac{19}{11}; \frac{26}{11}\right)}$

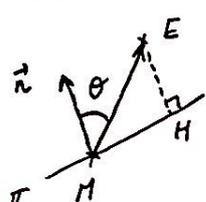
4. Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, on donne les points $D(2; 1; -1)$, $E(3; 2; -4)$, $F(1; -1; 3)$ et le vecteur $\vec{n}(1; -1; 2)$.

(a) Déterminer l'équation du plan Π passant par D et de vecteur normal \vec{n} . (0,5 pt)

Soit $M \in \Pi$ alors $\overrightarrow{DM} \cdot \vec{n} = 0$ avec $\overrightarrow{DM} = \begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \\ z+1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \\ z+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 = x-2-y+1+2z+2 = \boxed{x-y+2z+1=0}$$

(b) Déterminer la distance entre le point E et le plan Π (1,5 pt)



$d = EH = ME \cos \theta = \frac{|\overrightarrow{ME} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$ avec $M \in \Pi \Rightarrow M(0; 1; 0)$
 $\rightarrow \overrightarrow{ME}(3; 1; -4)$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{ME} \cdot \vec{n}| = \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = |3-1-8| = |-6| = 6$$

$$\|\vec{n}\| = \sqrt{1+1+2} = \sqrt{6} \Rightarrow d = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6} \approx 2,45 \text{ u} = d$$

(c) Calculer le volume du parallélépipède engendré par le trièdre $(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DF}, \vec{n})$ et préciser si le trièdre est direct ou indirect. (1,5 pt)

$V = \left| [\overrightarrow{DE}; \overrightarrow{DF}; \vec{n}] \right|$ avec $\overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DF} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$[\overrightarrow{DE}; \overrightarrow{DF}; \vec{n}] = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = 6-9 = -3$$

$\Rightarrow \underline{V = 3 \text{ u}^3}$ et le trièdre $(\overrightarrow{DE}; \overrightarrow{DF}; \vec{n})$ est indirect (signe -).

5. Déterminer l'équation de la fonction causale f ayant les propriétés suivantes : (1,5 pt)

- f est sinusoïdale, d'amplitude 4, de composante continue 2, π -périodique et maximale en $\pi/3$;
- $f(x) = 0$ si $x < \pi/4$.

$f(x) = \Theta(x - \frac{\pi}{4}) \left[2 + 4 \sin(2x - \varphi) \right]$ Recherche de φ : $\varphi / \sin(2 \cdot \frac{\pi}{3} - \varphi) = 1$

composante continue amplitude π périodique

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{3} - \varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = \Theta(x - \frac{\pi}{4}) \left[2 + 4 \sin(2x - \frac{\pi}{6}) \right]}$$

Autre possibilité: $f(x) = \Theta(x - \frac{\pi}{4}) \left[2 + 4 \cos(2x - \frac{2\pi}{3}) \right]$

6. Déterminer l'axe de symétrie de la courbe C_g d'équation $g(x) = x^2 + x + 1$. (0,5 pt)

Allure de la courbe:



l'axe passe par le minimum local

$$g'(x) = 2x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \Sigma = \left\{ H(x; y) / x = -\frac{1}{2} \right\}$$