

Enseignement des sciences
Mercredi 23 octobre 2019

*La théorie des champs conceptuels, ses
concepts, ses méthodes, ses usages en
didactique des mathématiques.*

Viviane DURAND-GUERRIER
Université de Montpellier, Département de mathématiques
IMAG, UMR 5149 CNRS, IREM

La théorie des champs conceptuels

Un article de référence

Vergnaud, G. (1991) La théorie des champs conceptuels,
Recherches en didactique des mathématiques, 10/2.3, 135-170, La
Pensée Sauvage éditions

La théorie des champs conceptuels

de quoi s'agit-il ?

- Une théorie cognitiviste qui vise à fournir un cadre cohérent et quelques principes de base pour l'étude du développement et de l'apprentissage des connaissances complexes.
- Elle intéresse la didactique, mais n'est pas à elle seule une théorie didactique.
- Comprendre les filiations et les ruptures entre connaissances (savoir-faire et savoirs exprimés).
- Chez l'enfant et l'adolescent les effets de l'apprentissage et du développement cognitif interviennent toujours conjointement.

(op. cité, p.133)

La théorie des champs conceptuels :

De quoi s'agit-il (2)

- Si on s'intéresse à son apprentissage, un concept ne se réduit pas à sa définition.
- C'est à travers des situations et des problèmes à résoudre qu'un concept acquiert du sens pour l'enfant.
- Importance du rôle du langage et du symbolisme dans la conceptualisation.
- Nécessité d'accorder une place centrale aux formes que prend la connaissance dans l'action du sujet. La connaissance rationnelle est opératoire ou n'est pas.

(p. 134-135)

La théorie des champs conceptuels :

Notions fondamentales

Pour Vergnaud, un schème est « l'organisation invariante de la conduite pour une classe de situation donnée ».

C'est dans les schèmes qu'il faut chercher les connaissances-en-acte du sujet, qui permettent à l'action d'être opératoire.

Exemple : le schème du dénombrement d'une petite collection : coordination des mouvements des yeux et des gestes du doigt et de la main par rapport à la position des objets, énoncé coordonné de la suite numérique, cardinalisation de l'ensemble dénombré par un soulignement tonique ou par répétition du dernier mot-nombre prononcé.

L'automatisation est l'une des manifestations les plus visibles du caractère invariant de l'organisation de l'action, ce qui n'exclut pas un contrôle conscient.

(p. 135-136)

La théorie des champs conceptuels : *Notions fondamentales (2)*

- Le schème est une totalité dynamique organisatrice de l'action du sujet pour une classe de situations donnée.
- Un schème est composé de règles d'action et d'anticipation, d'invariants opératoires (concepts-en-acte et connaissances-en-actes) et d'inférences indispensables à la mise en œuvre du schème.

Exemple d'inférence dans le schème du dénombrement :

- ✓ *si chaque objet a été pointé une fois et une seule, le dernier mot-nombre énoncé permet de répondre à la question « combien ? » (règle d'action) ;*
- ✓ *chaque objet a été pointé une fois et une seule (prémisse) ;*
- ✓ *le dernier mot-nombre énoncé est la réponse à la question « combien ? » (conclusion).*
- Un schème est un universel associé à une classe de situations. Il permet de générer des suites d'actions et de prises d'information en fonction des situations.

(p. 142 - *exemple adapté*)

La théorie des champs conceptuels :

Notions fondamentales (3)

Les invariants opératoires : trois types logiques fondamentaux

- Des invariants de type **propositions** : ils sont susceptibles d'être vrais ou faux - les **théorèmes-en-acte** sont des invariants de ce type. (p. 142)

Exemples:

- ✓ *Pour agrandir une figure, on ajoute un même nombre à chacune des dimensions.*
- ✓ *Le cardinal de la réunion de deux ensembles finis disjoints est égal à la somme des cardinaux respectifs de ces deux ensembles.*
- ✓ *La somme de deux fractions est une fraction ayant pour numérateur la somme des numérateurs et pour dénominateur la somme des dénominateurs.*

N.B. ces énoncés sont des énoncés généraux - ils contiennent une quantification universelle implicite.

La théorie des champs conceptuels : *Notions fondamentales (4)*

- Des invariants de type **fonction propositionnelle** : ils ne sont pas susceptibles d'être vrais ou faux, mais ils constituent des briques indispensables à la construction des propositions. Les **concepts-en acte** sont de ce type.

Exemples :

- ✓ « **être le cardinal d'un ensemble** » est une fonction propositionnelle à une place (*propriété*)
- ✓ « **Avoir le même cardinal que** » est une fonction propositionnelle à deux places (*relation binaire*)
- ✓ « **être la somme de** » est une relation ternaire (*c'est le cas des lois de composition binaires*)
- ✓ **La relation de proportionnalité** est une relation quaternaire (*elle met en jeu quatre termes*).

(p. 143 - *exemples adaptés*)

La théorie des champs conceptuels : *Notions fondamentales (5)*

- Des invariants de types **arguments** ; ce sont des objets qui permettent de saturer les fonctions propositionnelles : *objets matériels; nombres; fonctions; ensembles, relations; propositions...*

Exemples :

- ✓ **La France** est un pays européen
- ✓ **Le bateau** est à droite **du phare**.
- ✓ **4 + 3 = 7**
- ✓ **La fonction logarithme** est la réciproque de **la restriction à \mathbf{R}^{+*} de la fonction exponentielle**.
- ✓ **L'ensemble \mathbf{Q} des nombres rationnels** a le même cardinal que **l'ensemble \mathbf{N} des entiers naturels**.
- ✓ **La relation « être plus grand que »** est antisymétrique.
- ✓ **« 8 est un diviseur de 24 »** est la réciproque de **« 24 est un multiple de 8 »**

(p.145 - exemples complétés)

La théorie des champs conceptuels : *Notions fondamentales (6)*

« Ces distinctions sont indispensables pour la didactique parce que la transformation des concepts - outils en concepts - objets est un processus décisif dans la conceptualisation du réel. Cette transformation signifie entre autres choses que les fonctions propositionnelles peuvent devenir arguments. La nominalisation est une opération linguistique essentielle dans cette transformation. »

(p. 145)

Exemples :

- ✓ *La relation « être plus grand que » est antisymétrique.*
- ✓ *« avoir le même cardinal que » est une relation d'équivalence.*
- ✓ *la dérivabilité entraîne la continuité.*

La théorie des champs conceptuels : *Notions fondamentales (6)*

Concepts et théorèmes explicites ne forment que la partie visible de l'iceberg de la conceptualisation : sans la partie cachée formée par les invariants opératoires, cette partie visible ne serait rien. Réciproquement on ne sait parler des invariants opératoires intégrés dans les schèmes qu'à l'aide des catégories de la connaissance explicite : propositions, fonctions propositionnelles, objets - arguments. »

(p. 145)

La théorie des champs conceptuels : *Notions fondamentales (7)*

Ceci conduit Vergnaud à considérer qu'un concept est un triplet composé de trois sous-ensembles

$$C = (S, I, S)$$

S : l'ensemble des situations qui donnent du sens au concept (la référence)

I : l'ensemble des invariants sur lesquels reposent l'opérationnalité des schèmes (le signifié)

S : l'ensemble des formes langagières et non langagières qui permettent de représenter symboliquement le concept, ses propriétés, les situations et les procédures de traitement.

Etudier le développement et le fonctionnement d'un concept, au cours de l'apprentissage ou lors de son utilisation, c'est nécessairement considérer ces trois plans à la fois. Il n'y a pas en général de bijection entre signifiants et signifiés, ni entre invariants et situations. On ne peut donc réduire le signifié ni aux signifiants, ni aux situations.

(p. 146)

Sur les théorèmes - en - acte

- Un théorème - en - acte est un invariant opératoire ayant un certain *domaine de validité*.
- Il existe donc des domaines d'interprétation (des contextes ou domaines de réalité) dans lesquels un théorème en acte donné conduit à une règle d'action valide, même si ce n'est pas un théorème de la théorie mathématique de référence, ou de la théorie locale considérée, c'est-à-dire même s'il ne découle pas logiquement des axiomes assumés dans cette théorie.
- Lorsqu'un théorème en acte est utilisé en dehors de son domaine de validité, il peut conduire à des décisions d'action, ou à des prévisions erronées.
- Eprouver la limite de validité de l'énoncé se fait en classe par la rencontre *provoquée* avec une interprétation (un contexte, un domaine de réalité) dans laquelle l'utilisation de ce théorème-en-acte est mis en défaut, en particulier parce qu'il fait émerger une contradiction entre les résultats qu'il permet de prévoir et les résultats que l'on peut trouver expérimentalement.

Un exemple classique qui résiste bien au delà de l' école primaire

Dans le cadre de leurs travaux de recherche, Grivard et Leonard (1981) ont mis en évidence à l' école primaire et au collège une règle d' action largement répandue pour comparer les nombres décimaux :

On compare d'abord les parties entières, puis, si elles sont égales, on compare les parties décimales.

La mise en œuvre de cette règle fait appel à la règle d' action de comparaison des entiers.

Elle donne un résultat exact lorsque les décimaux sont au format (ont le même nombre de chiffre après la virgule). Sinon, le résultat obtenu en appliquant correctement cette règle est inexact.

Une remarque importante est que, en général, on ne peut pas identifier les règles d' action mises en œuvre par la seule observation du résultat de l' action.

Articulation schème (invariant opératoire) / situation

Éprouver la limite de validité de l'énoncé se fait en classe par la rencontre *provoquée* avec une interprétation (un contexte, un domaine de réalité) dans laquelle l'utilisation de ce théorème-en-acte est mis en défaut, en particulier parce qu'il fait émerger une contradiction entre les résultats qu'il permet de prévoir et les résultats que l'on peut trouver expérimentalement.

Ceci met en lumière la complémentarité entre les travaux de Gérard Vergnaud et de Guy Brousseau:

La situation de l'agrandissement du puzzle permet de faire éprouver aux élèves la limite de validité de la règle d'action "*Pour agrandir, il faut ajouter*", qui correspond à la *conception additive* (modèle implicite d'action).

Une situation classique pour mettre en défaut la règle de comparaison des décimaux

- ✓ Comparer l'aire de deux rectangles R_1 et R_2 dont les mesures des côtés sont respectivement en cm : 4,5 et 3 pour R_1 ; 5,3 et 2,5 pour R_2 .
- ✓ Le calcul fournit $13,5 \text{ cm}^2$ pour l'aire de R_1 et $13,25 \text{ cm}^2$ pour l'aire de R_2 .
- ✓ L'application du théorème en acte ci-dessus conduit à affirmer que l'aire de R_1 est plus petite que l'aire de R_2 , ce que contredit la comparaison par découpage sur papier millimétré.

Un axiome sur les aires

Si trois domaines deux à deux disjoints A , B et C d'aire non nulle sont telles que $B = A \cup C$, la mesure de l'aire de B est supérieure strictement à la mesure de l'aire de A

Les règles de calcul sur les nombres décimaux doivent permettre de calculer et de comparer les aires en accord avec

- 1) *L'axiome sur les aires.*
- 2) *Les résultats empiriques correspondants lorsque ceux-ci ne sont pas ambigus.*

N.B. *Pour que les résultats sur les aires jouent leur rôle, il faut q'ils soient dans le milieu objectif de l'élève (pas seulement dans le milieu matériel), ce qui suppose que les méthodes de comparaisons avant la mesure aient été travaillées.*

Un théorème - en - acte vrai

Si deux nombres décimaux ont le même nombre de chiffres après la virgule, alors pour les comparer, on compare d'abord les parties entières; si celles ci sont égales, le nombre le plus grand est celui qui a la plus grande partie décimale.

Dans le cas où l'antécédent est vérifié, l'application de cette règle d'action conduit à un résultat exact. Cette formulation revient à expliciter le domaine de validité du théorème-en-acte précédent. La mise en œuvre de cette inférence peut rester implicite.

Dans le cas de nombres décimaux au format, la mise en œuvre de la règle de comparaison générale "chiffre à chiffre" n'est pas utile ; elle est en générale moins rapide.

La forme langagière habituelle à l'école et la présence importante des décimaux au format renforce l'usage de ce théorème en acte.

Ceci ne serait pas le cas avec la forme $a_n 10^m$, mais elle est peu adapté pour l'école élémentaire.

La théorie des champs conceptuels :

Notions fondamentales (8)

Champs conceptuels

- Considérons en premier lieu un champ conceptuel comme un ensemble de situations. Par exemple, pour le champ conceptuel des structures additives, l'ensemble des situations qui demandent une addition, une soustraction ou une combinaison de telles opérations, et pour les structures multiplicatives, l'ensemble des situations qui demandent une multiplication, une division ou une combinaison de telles opérations. »
- La théorie des champs conceptuels privilégie des modèles qui donnent un rôle essentiel aux concepts mathématiques eux-mêmes. Certes la forme des énoncés et le nombre d'éléments mis en jeu sont des facteurs pertinents de complexité, mais leur rôle est subordonné.
- Si la première entrée d'un champ conceptuel est les situations, on peut aussi identifier une deuxième entrée, celle des concepts et des théorèmes

(p. 147)

Conclusion de l'article (extraits)

“La théorie des champs conceptuels repose sur un principe d'élaboration pragmatique des connaissances. On ne peut théoriser sur l'apprentissage des mathématiques ni à partir du seul symbolisme, ni à partir des situations seulement. Il faut considérer le sens des situations et des symboles. La clef est de considérer l'action du sujet en situation et l'organisation de sa conduite. D'où l'importance accordée au concept de schème.(...)”

L'homomorphisme entre le réel et les représentations ne doit pas être recherché au niveau des symbolismes d'abord, mais au niveau des invariants opératoires contenus dans les schèmes. C'est là que se situe la base principale de la conceptualisation du réel. De ce fait on n'insistera jamais assez sur la nécessité de mettre en scène dans des situations didactiques significatives les concepts qu'on veut enseigner et sur la nécessité pour cela d'analyser les tâches cognitives rencontrées par le sujet. On ne peut échapper à la classification des relations, des problèmes et des opérations de pensée nécessaires à leur solution.” (p. 240-241)

Montpellier - 23 octobre 2019

Réponses de Gérard Vergnaud,
à l'issue du colloque ARDECO, 28-31 janvier 2004
Extraits choisis

In Merri, M. (ed.) 2007 *Activité humaine et conceptualisation*.
Questions à Gérard Vergnaud, Presses universitaires du Mirail.

La question de la conceptualisation

Ma définition du concept (...) découle directement de cette préoccupation : partir des processus de conceptualisation qui organisent l'action. Ensemble de situations parce que ce n'est pas dans une seule situation que se forment un concept et ses propriétés (et la rencontre avec ces diverses situations peut prendre des années) ; ensemble d'invariants opératoires, justement parce que les propriétés pertinentes ne sont pas les mêmes d'une classe de situation à une autre; ni d'ailleurs du même niveau de difficultés; ensemble de représentations langagières et symboliques parce que les mises en mots et en symboles ne sont jamais univoques même lorsque la culture a privilégié une forme. (...)

Si je résume provisoirement mon point de vue, je peux dire que, s'il faut étudier la conceptualisation pour comprendre ce qu'est un concept, c'est parce que la connaissance est adaptation, et que c'est un processus avant que d'être un produit.

La question de la référence

En conclusion, on ne peut pas tenir pour négligeable la distinction entre grandeurs, relations; état et transformation*, pas d'avantage qu'on ne peut gommer l'analyse dimensionnelle pour des grandeurs proportionnelles entre elles. Une épistémologie des mathématiques qui voudrait évacuer les grandeurs et s'en tenir aux nombres, et cependant théoriser sur les apprentissages élémentaires, est une impasse. L'épistémologie de l'apprentissage des mathématiques est différente de l'épistémologie des mathématiques constituées. (p.346)

* *Gérard Vergnaud fait ici référence à la classification des structures additives qui propose six relations de base permettant d'engendrer l'ensemble du champ conceptuel des structures additives. Ceci est développé dans Vergnaud (1981) L'enfant la mathématique et la réalité, Peter Lang (chapitre 6), et présenté de manière plus synthétique dans Vergnaud (1991)*

Les six relations additives de bases

I. Lois de composition de deux mesures en une troisième

Paul a 6 billes en verre et 8 billes en acier. Il a en tout 14 billes.

II. La transformation quantifiée d' une mesure initiale en une mesure finale

Paul avait 7 billes avant de jouer. Il a gagné 4 billes. Il en a maintenant 11.

III. La relation (quantifiée) de comparaison entre deux mesures

Paul a 8 billes. Jacques en a 5 de moins. Il en a donc 3.

IV. La composition de deux transformations

Pierre a gagné 6 billes hier et il en a perdu 9 aujourd' hui. En tout, il en a perdu 3.

V. La transformation d' une relation

Paul devait 6 billes à Henri. Il lui en rend 4. Il ne lui en doit plus que 2.

VI. La composition de deux relations

Paul doit 6 billes à Henri, mais Henri lui en doit 4. Donc Paul lui en doit 2.

N.B. Pour chaque catégorie, Vergnaud analyse différentes classes de problèmes conduisant à des niveaux de complexité différents.

Analyse détaillée des classes de problèmes de la catégorie II

Une transformation b opère sur une mesure a pour obtenir une mesure c

Six grandes classes de problèmes selon que

- la transformation est positive ou négative,
- la question porte sur a , sur b ou sur c .

D'autres facteurs interviennent

- la facilité plus ou moins grande du calcul numérique nécessaire
- l'ordre et la présentation des informations
- le type de contenu et de relations envisagées

Remarque 1 : Vergnaud note que la soustraction n'est pas subordonnée à l'addition ; elle est associée aux termes *donner, perdre, descendre, diminuer*, comme l'addition l'est aux termes *recevoir, gagner, monter, augmenter*. L'objectif est de montrer que les deux opérations sont réciproques l'une de l'autre.

Remarque 2 : les mesures sont nécessairement positives. Seules les transformations et les états relatifs sont susceptibles d'être négatifs.

La question de la vérité et de la pertinence (1)

(...) il faut absolument distinguer entre théorèmes et concepts, même si on ne peut pas imaginer de théorème sans concepts ou de concept sans théorèmes. Faute de faire cette distinction, les théoriciens des réseaux sémantiques restent en deçà d'une théorie opératoire.

(...) Il y a autant de raisons théoriques de distinguer entre théorème-en-acte et concept-en-acte qu'il y en a de distinguer entre théorèmes et concepts ; il en va de même pour la distinction entre prédicat et argument ou encore entre objets singuliers et variables, fussent-ils implicites.

(p. 348)

La question de la vérité et de la pertinence (2)

(...) les inférences utilisées dans l'action, de manière souvent peu explicites, peuvent être analysées dans le langage de la science. Non seulement elles le peuvent, mais elles le doivent, si on ne veut pas laisser s'installer une rupture dommageable entre la forme opératoire de la connaissance et sa forme prédicative*. La forme prédicative de la science est évidemment essentielle, justement parce qu'elle est explicite et peut-être partagée, mais une connaissance qui n'est pas opératoire n'est pas véritablement une connaissance. **C'est donc un travail essentiel, pour le chercheur, que de formuler dans des termes scientifiques les connaissances utilisées dans l'action, fussent-elles totalement implicites, voire inconscientes.** (p.349)

- Ceci est développé dans Vergnaud (2001) *Forme opératoire et forme prédicative de la connaissance*, in *Actes du colloque GDM 2001*, en ligne :

<http://smf.emath.fr/Enseignement/TribuneLibre/EnseignementPrimaire/ConfMontrealmai2001.pdf>

Un exemple en géométrie

Référence :

Cours de Denise Grenier, master IC2A, 2007, en ligne :
prevert.upmf-grenoble.fr/.../coursTCC%20Conceptions.pdf

La symétrie orthogonale (Grenier, 1988)

Les recherches conduites par Grenier (1988) ont fait apparaître une règle d'action (une théorème en acte) très répandue chez les élèves:

Le symétrique d'un point est à la même distance de l'axe que le point donné, cette distance étant prise le long de l'horizontale de la feuille.

Une grande partie des erreurs des élèves peuvent s'interpréter comme le résultat de la mise en œuvre de cette règle d'action.

Le domaine de validité est l'ensemble des constructions pour lesquelles l'axe de symétrie est vertical.

Le prégnance de cette règle d'action est renforcée d'une part par les aspects culturels de la symétrie, et d'autre part par un choix didactique consistant à proposer essentiellement des constructions avec un axe vertical, ce qui était le cas lors des travaux de recherche de l'auteur, ceci apparaissant en particulier dans les manuels.