Le cycliste

Un cycliste monte un col à la vitesse de 21km:h ; il redescend par le même chemin à la vitesse de 63 km/h. *Quelle est sa vitesse moyenne sur le trajet aller-retour ?*

Préliminaire

Lorsque l'on pose ce problème, une réponse fréquemment donnée est 42km/h.
Cette réponse est celle qu'on obtient en appliquant le modèle mathématique de *la moyenne arithmétique* des deux vitesses, alors qu'ici, le modèle mathématique pertinent est la *moyenne harmonique*.

La moyenne arithmétique de deux nombres est leur demi somme ; la moyenne harmonique de deux nombres a et b non nuls est le nombre c tel quel.

On peut donc rapprocher ce qui se passe ici avec ce que l'on observe avec la situation du puzzle de Brousseau où le modèle additif est fréquemment mobilisé pour résoudre le problème de l'agrandissement, alors que le modèle pertinent est le modèle multiplicatif.

Résolution mathématique " experte "

Rappelons que la vitesse moyenne pour un trajet donné est le quotient de la distance parcourue par le temps mis pour ce parcours.

Notons d la distance commune parcourue à l'aller et au retour et notons T le temps mis pour le trajet aller et T' le temps mis pour le trajet retour.

La distance parcourue est 2d et le temps mis est T + T'. Notons v la vitesse moyenne ; on a :

$$v = \frac{2d}{T+T} \quad (1)$$

D'après l'énoncé, nous avons d'une part : $21 = \frac{d}{T}$, et d'autre part $63 = \frac{d}{T}$; d'où

$T = \frac{d}{21}$, et $T = \frac{d}{63}$.

En remplaçant dans l'égalité n°1, on obtient :

$$v = \frac{2d}{\frac{d}{21}+\frac{d}{63}} \quad (2)$$

Comme d est non nul, on peut simplifier par d et on obtient :

$$v = \frac{2}{\frac{1}{21}+\frac{1}{63}} \quad (3)$$

En terminant le calcul, on trouve $v = \dfrac{63}{2} = 31{,}5$.

Ceci peut encore s'écrire :

$$\frac{2}{v} = \frac{1}{21} + \frac{1}{63} \quad (4)$$

La relation (4) établit le fait que v est *la moyenne harmonique* de 21 et 63.

Si on considère maintenant des vitesses quelconques non nulles notées v_1 et v_2, le même calcul montre que :

$$\frac{2}{v} = \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}$$

Ce calcul nous montre donc d'une part que le modèle mathématique pertinent ici est *la moyenne harmonique* ; d'autre part, il justifie l'affirmation selon laquelle le résultat est indépendant de la distance choisie, et valide donc la procédure qui consiste à choisir une distance pour faire le calcul de la vitesse moyenne sur l'aller-retour. Notons que le même raisonnement vaut pour le temps mis pour l'aller, sous réserve de prendre en compte le fait que le rapport des durées est inversement proportionnel au rapport des vitesses.

Différents modes de raisonnement mis en oeuvre pour traiter ce problème :

1) La vitesse moyenne est la moyenne (arithmétique) des vitesses. On trouve alors que la vitesse moyenne est 42 km/h. Ce résultat est erroné : il suffit pour s'en convaincre de faire le calcul en choisissant une distance arbitraire.
Par exemple, choisissons d = 21 km ; le trajet aller dure une heure ; le trajet de retour dure trois fois moins, soit 20 mn. Le cycliste a parcouru 42 km en 1h20, soit 4/3 d'heure. Sa vitesse est donc égale en Km/h à $\dfrac{3}{4} \times 42$, soit 31,5 km/h. Notons que ceci fournit le résultat dans le cas particulier étudié et nous prouve que le résultat proposé, c'est-à-dire 42 km/h, ne convient pas.

2) La vitesse moyenne est indépendante de la distance parcourue. On peut donc la calculer en choisissant une distance arbitraire. Par conséquent, le calcul ci-dessus fournit la réponse à la question : la vitesse est de 31,5 km/h. Comme nous l'avons vu ci-dessus, ce raisonnement est correct ; il faut cependant un argument pour justifier cette indépendance. En effet, il se pourrait que les données du problème soient incomplètes et que l'on ne puisse pas résoudre sans ajouter d'information supplémentaire.

3) Il descend trois fois plus vite ; donc il met trois fois plus de temps pour monter ; par suite, le temps sur l'aller-retour est égal à quatre fois le temps mis pour descendre. Comme la distance est le double; cela signifie qu'il met quatre fois le temps nécessaire à la descente et ce pour parcourir un trajet double. Sa vitesse est donc la moitié de celle de la descente. Ceci conduit au résultat correct 31,5 km. Ce raisonnement est correct.

4) S'il faisait tout le parcours à 63 km/h, il parcourrait dans le même temps une distance égale à 4d. Comme la distance parcourue est 2d, c'est que sa vitesse est la moitié.

Ce raisonnement est très proche du précédent, mais on *change* la situation *réelle* ; il semble donc a priori moins convaincant (sauf peut être pour celui qui le produit).

5) Outre la méthode experte présentée plus haut, on peut aussi résoudre un système d'équation. Avec les mêmes notations, on a les relations suivantes :

$d = v_1 T = v_2 T'$ $\quad v = \dfrac{2d}{T + T'}$ $\qquad v_2 = 3v_1$ et $T = 3T'$

on en déduit que v, T et T' vérifient la relation : $v = \dfrac{v_1 T + v_2 T'}{T + T'}$; comme T = 3T', on obtient :

$$v = \frac{(3v_1 + v_2)T'}{4T'} = \frac{3v_1 + v_2}{4} = \frac{2v_2}{4} = \frac{v_2}{2}$$

Cette méthode conduit au résultat. Cependant, il faut être vigilant car la dernière formule ne se généralise pas ; en effet, pour l'établir on a utilisé explicitement le fait que les vitesses sont dans un rapport 1/3. Le fait qu'ici la vitesse moyenne est la moitié de la vitesse de descente est fortuit : c'est une conséquence du choix des rapports.
Pour mettre ceci en évidence, il suffit de jouer sur la variable didactique “ rapport des vitesses ”.

Un résultat surprenant

À la question : à quelle vitesse faudrait-il faire le trajet de retour pour que la vitesse moyenne soit de 42 km/h, le modèle mathématique retenu (la moyenne harmonique) fournit la réponse : *c'est impossible*.

En effet, la question posée se traduit par la résolution de l'équation :

$$\frac{2}{42} = \frac{1}{21} + \frac{1}{x}$$

Or cette équation n'a pas de solution.

Ceci n'est pas vraiment en accord avec l'intuition, aussi on peut légitimement se poser la question de savoir si l'on doit se fier à ce résultat (le modèle retenu est-il bien valide ?) ; et si oui, on voudrait pouvoir expliquer ce résultat *sans recourir au modèle mathématique*.

Une manière de se convaincre consiste à modifier légèrement l'énoncé du problème sous la forme suivante :.

Deux cyclistes partent en même temps du point A ; ils se rendent au point B et sans s'arrêter retournent au point A. Le premier roule sur tout le parcours à la vitesse de 42 km/h. Le second roule à la vitesse de 21km/h à l'aller et de 63 km/h au retour. Lequel arrivera le premier ?

Nous savons déjà que le premier cycliste arrivera le premier. Montrons en outre que le second cycliste ne peut atteindre la vitesse moyenne de 42 km/h.

Notons toujours d la distance et notons T le temps mis par le second cycliste pour faire le trajet aller. Pendant ce temps T, le premier cycliste, qui roule deux fois plus vite, a parcouru la distance 2d qui correspond à l'aller-retour. Il arrive donc en A au moment où le deuxième cycliste arrive en B.
Ainsi si nous considérons un seul cycliste ayant une vitesse de 21km/h à l'aller et une vitesse moyenne de 42km/h sur l'aller-retour, il devrait arriver simultanément en A et en B ce qui est impossible si A et B sont deux points distincts.

En fonction de ses connaissances sur les fonctions mathématiques, on peut aussi s'intéresser au comportement de la fonction qui permet d'obtenir v en fonction de v_2. Il s'agit de la fonction qui à x associe $\frac{42x}{21+x}$; cette dernière expression peut se mettre sous la forme : $42-\frac{42\times 21}{21+x}$
Ceci met en évidence le fait que même en augmentant considérablement la valeur de x, on ne pourra pas atteindre la vitesse de 42 km/h. La courbe représentative de la fonction admet une asymptote horizontale d'équation y = 42. Par exemple, pour atteindre une vitesse moyenne de 40km/h, il faudrait effectuer la descente à 420km/h.

Quelques commentaires didactiques

Cette situation relève d'une catégorie de problèmes que l'on pourrait qualifier de pseudo concrets, puisqu'en effet, on a déjà fait un premier travail de simplification en éliminant « ce qui se passe au col » ; toutefois la question posée - la valeur de la vitesse moyenne - est une question relativement pertinente vis a vis de la situation de la vie courante évoquée, qui permet d'envisager un contrôle de la vraisemblance des résultats proposés par un recours à cette situation évoquée. Sur le plan mathématique, un premier résultat remarquable est que nous avons une illustration de ce qu'il est illusoire de prétendre déterminer « à coup sûr » les données nécessaires à la résolution d'un problème avant d'avoir résolu ce problème. Or ceci est un enjeu important de l'enseignement des mathématiques, en particulier dans l'articulation école élémentaire/collège. Sur le plan didactique, nous avons ici un exemple éclairant de ce qu'est un théorème en acte au sens de Gérard Vergnaud (1991). En effet, la réponse majoritaire 42km/h provient de l'application du théorème en acte suivant : « *la vitesse moyenne s'obtient en divisant par deux la somme des vitesses* ». Ce théorème en acte a un domaine de validité étendu puisqu'il s'applique lorsque l'on considère des intervalles de temps égaux. Mais utilisé en dehors de son domaine de validité, il conduit à des résultats en contradiction avec les données de la situation. Dans le cas du cycliste, la confrontation ne se fait pas directement avec le monde réel, mais avec une situation évoquée. Cependant, comme on l'a vu plus haut, le modèle mathématique mobilisé peut être remis en question si les résultats qu'il produit heurtent l'intuition.