Enseignement des Sciences

Mercredi 9 octobre 2019

Résolution de problème
Le cycliste

Viviane Durand-Guerrier
Université de Montpellier, Facmlté des Sciences
Département de mathématiques
viviane.durand-guerrier@umontpellier.fr

UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER

IMAG
INSTITUT MONTPELLIERAIN ALEXANDER GROTHENDIECK

Un cycliste monte un col à la vitesse de 21km/h.

Arrivé au sommet, il redescend aussitôt par le même trajet à la vitesse de 63km/h.

Quelle est la vitesse moyenne de ce cycliste sur l'aller-retour ?

Ce problème a été proposé à des élèves de collège qui ont donné les réponses suivantes

28 km/h   30km/h   31,5 km/h   42 km/h

Certains élèves ont dit que l'on ne pouvait pas répondre à la question.

Quelle est selon vous la bonne réponse à la question posée ?

Une réponse fréquemment proposée

42 km/h

Ce qui conduit à cette réponse : la vitesse moyenne est la moyenne (arithmétique) des vitesses.

On trouve alors que la vitesse moyenne est 42 km/h.

Ce résultat est erroné : il suffit pour s'en convaincre de faire le calcul en choisissant une distance arbitraire.

Par exemple, choisissons d = 21 km ;

le trajet aller dure une heure ;

le trajet de retour dure trois fois moins, soit 20 mn. Le cycliste a parcouru 42 km en 1h20, soit 4/3 d'heure.

Sa vitesse moyenne est donc égale à 31,5 km/h.

Notons que ceci fournit le résultat dans le cas particulier étudié et nous prouve que le résultat proposé, c'est-à-dire 42 km/h, ne convient pas.

La vitesse moyenne que nous venons de calculer fournit-elle la réponse demandée ?

- La vitesse moyenne est indépendante de la distance parcourue.
- On peut donc la calculer en choisissant une distance arbitraire.
- Par conséquent, le calcul ci-dessus fournit la réponse à la question : la vitesse est de 31,5 km/h.

Certains peuvent ne pas être convaincus.

En effet, il se pourrait que les données du problème soient incomplètes et que l'on ne puisse pas résoudre sans ajouter d' information supplémentaire.

Il faut donc un argument pour justifier cette indépendance.

Un raisonnement de type arithmétique justifiant que la vitesse moyenne est indépendante de la distance.

- Il descend trois fois plus vite ; donc il met trois fois plus de temps pour monter ; par suite, le temps sur l'aller-retour est égal à quatre fois le temps mis pour descendre. Comme la distance totale est le double de la distance de descente ; cela signifie qu'il met quatre fois le temps nécessaire à la descente et ce pour parcourir un trajet double.
- Sa vitesse est donc la moitié de celle de la descente.
- Ceci conduit au résultat 31,5 km.
- Ce raisonnement est correct et montre que le résultat ne dépend pas de la distance

Un second argument de type arithmétique

- S’il faisait tout le parcours à 63 km/h, il parcourrait dans le même temps une distance égale à 4 fois la distance de montée. Comme la distance parcourue est 2 fois la distance de montée, c’est que sa vitesse est la moitié.

- Ce raisonnement est très proche du précédent, mais on *change* la situation *réelle* ; il semble donc a priori moins convaincant (sauf peut être pour celui qui le produit).

Question subsidiaire

Un cycliste monte un col à la vitesse de 21km/h.

Arrivé au sommet, il redescend aussitôt par le même trajet.

A quelle vitesse le cycliste devrait-il descendre pour que sa vitesse moyenne soit égal à 42km/h ?

Une modélisation algébrique

- La vitesse moyenne pour un trajet donné est le quotient de la distance parcourue par le temps mis pour ce parcours.
- Notons ***d*** la distance commune parcourue à l'aller et au retour en km et notons ***T*** le temps mis pour le trajet aller et ***T'*** le temps mis pour le trajet retour en heure.
- La distance parcourue est **2d** et le temps mis est

T* + *T'.

- Notons ***v*** la vitesse moyenne en km/h; on a :

$$v = \frac{2d}{T+T'} \quad (1)$$

- D' après l' énoncé, nous avons

$$21 = \frac{d}{T} \; et \; 63 = \frac{d}{T\prime} \; d'où \; T = \frac{d}{21} \; et \; T' = \frac{d}{63}$$

$$T + T' = \frac{d}{21} + \frac{d}{63} = d\left(\frac{1}{21} + \frac{1}{63}\right) (2)$$

De l'égalité $v = \frac{2d}{T+T\prime}$ (1) et de (2)

On tire

$$v = \frac{2d}{d\left(\frac{1}{21}+\frac{1}{63}\right)}$$

- On peut donc simplifier par d.
- **Conséquence : La vitesse v est ne dépend pas de la distance d**

Après simplification par d, on obtient

$$v = \frac{2}{\left(\frac{1}{21}+\frac{1}{63}\right)} = \frac{2}{\frac{4}{63}} = \frac{63}{2} = 31{,}5$$

On a donc prouvé que la vitesse moyenne sur l'aller retour est indépendante de la distance et vaut 31,5 km/h

Généralisation

Notons v_1 et v_2 les vitesses de montée et de descente

$$v = \frac{2}{\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right)} \quad ou \quad \frac{2}{v} = \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}$$

On dit que v est la moyenne harmonique des vitesses de montée et de descente.

Retour sur la question subsidiaire

Un résultat surprenant

- À la question : à quelle vitesse faudrait-il faire le trajet de retour pour que la vitesse moyenne soit de 42 km/h, le modèle mathématique retenu (la moyenne harmonique) fournit la réponse : *c'est impossible*.
- En effet, la question posée se traduit par la résolution de l'équation :

$$\frac{2}{42} = \frac{1}{21} + \frac{1}{x}$$

Or cette équation n'a pas de solution.

Ceci n'est pas vraiment en accord avec l'intuition, aussi on peut légitimement se poser la question de savoir si l'on doit se fier à ce résultat (le modèle retenu est-il bien valide ?) ; et si oui, on voudrait pouvoir expliquer ce résultat <u>sans recourir au modèle mathématique.</u>

E6 : .... Enfin, un calcuL... je comprends pas comment un calcul peut nous montrer que '" Un calcul, je sais pas moi, j'aurais bien vu qu'on ait trouvé, je sais pas ... 500 km.h par exemple, et ça d'accord c'est pas possible mais là non .... là vraiment ...... voilà, c'est ça, ***je comprends pas qu'un calcul puisse nous prouver que quelque chose est impossible !***

(Di Martino, 2002, p.9)

Une manière de se convaincre consiste à modifier légèrement l'énoncé du problème sous la forme suivante

Deux cyclistes partent en même temps du point A ; ils se rendent au point B et sans s'arrêter retournent au point A. Le premier roule sur tout le parcours à la vitesse de 42 km/h, tandis que le second roule à la vitesse de 21km/h à l'aller.

Le second pourra-t-il rattraper le premier?

- Notons toujours d la distance et notons T le temps mis par le second cycliste pour faire le trajet aller.
- Pendant ce temps T, le premier cycliste, qui roule deux fois plus vite, a parcouru la distance $2d$ qui correspond à l'aller-retour. Il arrive donc en A au moment où le deuxième cycliste arrive en B.
- Ce dernier ne peut donc pas le rattraper.

Ainsi si nous considérons un seul cycliste ayant une vitesse de 21km/h à l'aller et une vitesse moyenne de 42km/h sur l'aller-retour, il devrait arriver simultanément en A et en B ce qui est impossible si A et B sont deux points distincts.

Conclusion : si la vitesse moyenne sur l'aller est égale à 21km/h, il est impossible d'atteindre une vitesse moyenne de 42km/h sur l'aller retour

- On peut aussi s'intéresser au comportement de la fonction qui permet d'obtenir v en fonction de v_2.
-

De la relation

$$\frac{2}{v} = \frac{1}{21} + \frac{1}{x} = \frac{x + 21}{21x}$$

on tire

$$v = \frac{42x}{x + 21} = 42 - \frac{42 \times 21}{x + 21}$$

Ceci met en évidence le fait que même en augmentant considérablement la valeur de x, on ne pourra pas atteindre la vitesse de 42 km/h.

Par exemple,

- pour atteindre une vitesse moyenne de 40km/h, il faudrait effectuer la descente à 420km/h,
- pour une vitesse de 41km/h, il faudrait descendre à 861km/h
- pour une vitesse de 41,5 km/h, il faudrait descendre à 1764km/h.

La courbe représentative de la fonction admet une asymptote horizontale d'équation $y = 42$ et se trouve sous son asymptote.

Quelques commentaires didactiques

Cette situation relève d'une catégorie de problèmes que l'on pourrait qualifier de pseudo concrets, puisqu'en effet, on a déjà fait un premier travail de simplification en éliminant « ce qui se passe au col ».

Toutefois la question posée - la valeur de la vitesse moyenne - est une question relativement pertinente vis a vis de la situation de la vie courante évoquée, qui permet d'envisager un contrôle de la vraisemblance des résultats proposés par un recours à cette situation évoquée.

Sur le plan mathématique, un premier résultat remarquable est que nous avons une illustration de ce qu'il est illusoire de prétendre déterminer « à coup sûr » les données nécessaires à la résolution d'un problème avant d'avoir résolu ce problème.

Un deuxième résultat est de montrer que la question de la généralité peut se traiter de plusieurs manières, et pas seulement par du calcul littéral, mais que celui-ci fournit des outils de contrôle, donne à voir et rend explicites certaines relations et propriétés et permet de faire des prédictions sur le « réel ».

Or ceci est un enjeu important de l'enseignement des mathématiques, en particulier dans l'articulation école élémentaire/collège.

Sur le plan didactique, nous avons ici un exemple éclairant de ce qu'est un théorème en acte au sens de Gérard Vergnaud (1991): un résultat général utilisé en acte (sans être nécessairement formulé) en dehors de son domaine de validité :

En effet, la réponse majoritaire 42km/h provient de l'application du théorème en acte suivant :

« *La vitesse moyenne est la moyenne arithmétique des vitesses* ».

Ce *théorème en acte* a un domaine de validité étendu puisqu'il s'applique lorsque l'on considère des intervalles de temps égaux.

Mais utilisé en dehors de son domaine de validité, il conduit à des résultats en contradiction avec les données de la situation

Dans le cas du cycliste, la confrontation ne se fait pas directement avec le monde réel, mais avec une situation évoquée.

Cependant, comme on l'a vu plus haut, le modèle mathématique mobilisé peut être remis en question si les résultats qu'il produit heurtent l'intuition.

L'expérience montre que même des sujets éduqués en mathématiques peuvent mobiliser ce théorème en acte dans cette situation.

La moyenne harmonique n’est en général pas définie en tant que telle au lycée ; elle l’est parfois à l’université, mais en général sans lien avec des situations réelles.

Les notions de moyenne rencontrées sont essentiellement les moyennes arithmétiques ou les moyennes pondérées, ce qui renforce la mise en œuvre du théorème en acte.

Introduire la moyenne harmonique dans cette situation vise un objectif de généralisation, caractéristique d’une démarche mathématique.

On est en présence ici d'une relation entre trois grandeurs de même nature.

Fixer la vitesse de montée conduit à une relation de type fonctionnel entre la vitesse moyenne et la vitesse de descente.

Selon la question, l'une ou l'autre joue le rôle de variable.

Le point de vue fonctionnel permet d'introduire une première approche sur la notion de limite monotone : on peut s'approcher aussi près que l'on veut de la valeur 42 km, par valeurs strictement inférieures.

Ceci permet de remettre en cause l'idée intuitive qu'une fonction croissante strictement tend nécessairement vers plus l'infini lorsque la variable tend vers plus l'infini.

En guise de conclusion (1)
A propos de l'erreur

Tout le monde peut se tromper ; ceci n'est pas une preuve d'incompétence, simplement une preuve d'ignorance.

La mise en œuvre d'un théorème en acte en dehors de son domaine de validité peut conduire à un résultat erroné.

La reconnaissance de l'erreur est la première étape pour la dépasser.

En situation de résolution de problème, la reconnaissance de l'erreur est le moteur de la poursuite de la recherche: or

Pour reconsidérer son résultat, il faut en douter sérieusement et pour abandonner une procédure qui a fait ses preuves dans de nombreuses situations, il faut avoir une bonne raison de le faire.

Les situations permettant des rétroactions fortes du côté du réel, matériel ou évoqué, favorisent ce questionnement.

Eprouver la limite de validité de l’énoncé se fait en classe par la rencontre *provoquée* avec une interprétation (un contexte, un domaine de réalité) dans laquelle l’utilisation de ce théorème-en- acte est mis en défaut, en particulier parce qu’il fait émerger une contradiction entre les résultats qu’il permet de prévoir et les résultats que l’on peut trouver expérimentalement.

En guise de conclusion (2)
Modélisation mathématique de problèmes concrets

Dans le cas de problèmes concrets ou pseudo concrets, la mobilisation d'outils mathématiques est une aide à la résolution du problème, qui devient un problème de mathématiques.

Cette exploration du problème permet un approfondissement des notions mathématiques en jeu ; ceci n'est pas exclusif d'autres types de raisonnement.

Il faut alors « rendre des comptes au réel ». On ne peut pas faire n'importe quoi ; les mathématiques sont autonomes, mais leur rapport au réel ne l'est pas.

Autrement dit, si l'utilisation d'un modèle mathématique pour un problème concret permet de faire des prédictions sur le comportement du réel, il faut cependant s'assurer que l'on reste dans le domaine de validité du modèle.

En effet, dans toute modélisation, on abandonne une partie des paramètres de la situation, et parmi ceux-ci certains pourraient être cruciaux dans des situations limites.

Ce va et vient entre modèle et réalité aide à construire un rapport idoine aux mathématiques et favorise le développement de compétences nécessaires à la conduite des raisonnements mathématiques.

Références citées

Brousseau, G. (1998) *La Théorie des situations didactiques*, Grenoble : La Pensée sauvage Editions.

Di Martino, H. (2002) Comment ça s'écrit. Lire, écrire, interpréter des expressions algébriques en seconde, *Petit x, n° 59*, 9-22

Vergnaud, G. (1990) La Théorie des champs conceptuels, *Recherche en Didactique des Mathématiques, vol 10/2*.