COMMENT ÇA S'ÉCRIT ?

LIRE, ECRIRE, INTERPRETER DES EXPRESSIONS ALGEBRIQUES EN SECONDE.

Hélène DI MARTINO
IREM de Grenoble

Ce qui me tue dans l'écriture, c'est qu'elle est trop courte.
Quand la phrase s'achève, que de choses sont restées en dehors.

Jean-Marie Gustave Le Clézio.

Résumé : Partant du constat récurrent que le maniement des expressions algébriques ne va pas de soi pour les élèves en début de lycée, l'article analyse quelques difficultés repérées sur deux situations, en terme de modélisation intra-mathématique et de valeur de preuve, et propose des voies pour une familiarisation avec une pratique algébrico-fonctionnelle non élémentaire.

I - Position du problème.

Si le passage de l'arithmétique à l'algèbre reste problématique dans les petites classes de collège [1], la pratique enseignante en classe de seconde et au delà montre de façon récurrente que de nombreux élèves arrivant en lycée sont peu familiarisés avec l'outil algébrique : d'une part les écritures algébriques leur sont rébarbatives, en raison d'une vision assez figée et mécanique de ces écritures et d'une méconnaissance de leur aspect fonctionnel [2], d'autre part un calcul peut n'avoir aucune valeur de preuve dans certaines circonstances (en dehors des effets de contrat essentiellement), sa seule finalité étant le plus souvent de donner un résultat numérique et une réponse positive au problème posé. Lorsque les problèmes posés sont trop "concrets" et porteurs d'une forte charge sémantique, on peut observer que ceux-ci se résolvent la plupart du temps par l'arithmétique, soit par un autre moyen, souvent essentiellement intuitif et/ou utilisant les fortes particularités du contexte. Se repose alors la question du statut des mathématiques : les élèves n'en restent-ils pas trop souvent à des idées trop simples où le passage à l'écriture ne se fait pas, en tout cas pas spontanément ?

Si faire des mathématiques passe nécessairement le plus souvent par une écriture, encore faut-il que l'écriture soit "bonne", au sens où d'une part elle traduit bien ce que l'on veut dire, et d'autre part, elle permet d'en dire un peu plus et/ou de le dire un peu mieux que ce que l'on pouvait dire dans un premier temps. Pour illustrer mon propos je vous propose les deux exemples ci-dessous.

II - Deux observations en seconde

II.1 - Un calcul peut-il avoir valeur de preuve ?

Voici par exemple un moment fort, dans une classe de seconde : au moment du traitement des inéquations et encadrements, l'exercice avait été donné à préparer à la maison, avec d'autres, de façon tout à fait anodine, le titre cependant pouvait mettre la puce à l'oreille, mais cela n'a pas été le cas.

Enoncé : Arrête de pédaler...
Un cycliste se rend d'une ville A à une ville B.
Il effectue le trajet aller à 20 km.h^{-1}.
Quelle doit être sa vitesse au retour pour que sa vitesse moyenne sur tout le trajet aller-retour soit de 45 km.h^{-1} ? Pouvez-vous en dire plus ?

La forme de l'énoncé suggère peut-être qu'il y a une réponse et une seule, que l'on doit pouvoir calculer et la "fonction" sous-jacente n'est pas désignée : en fait, la vitesse moyenne totale est une fonction de la vitesse moyenne de retour seule ($V = \frac{40v}{v+20}$), bien qu'elle ait plutôt l'air d'être une fonction de deux variables : la distance et la vitesse de retour, et si l'on aborde les choses du point de vue fonctionnel, il s'agirait donc de prouver que 45 n'a pas d'antécédent, en démontrant par exemple que la fonction est majorée, ce qui ne s'aborde pas ainsi en principe en seconde : ce qui est donc proposé devrait conduire à un changement de point de vue sur les "formules", la "formule" $v = d/t$ étant alors un modèle possible de la situation à partir des grandeurs d et t, modèle décrivant une propriété du déplacement du cycliste (les 3 écritures $v=d/t$, $d = vt$ et $t = d/v$ n'étant bien évidemment pas conceptuellement équivalentes). Une autre façon de traiter cette situation aurait été de proposer plusieurs vitesses de retour possibles et de demander de se décider sur un ordre de grandeur, pour ensuite organiser un débat dans la classe (c'est une variante de la situation du cycliste proposée par Marc Legrand en Deug A [4] et utilisée autrement : le but poursuivi ici était de trouver une façon de prouver une impossibilité sans résoudre d'équation). Ceci n'a pas empêché que des choses importantes arrivent à être dites dans la classe.

La distance AB n'est pas donnée, aussi les élèves ont systématiquement et classiquement donné la réponse de 70 km.h^{-1} pour le retour, car alors la moyenne des vitesses aller et retour est 45 $km.h^{-1}$ (pour certains - mais pas tous - en résolvant l'équation : $\frac{20 + v}{2} = 45$).

Il est alors demandé à la classe de vérifier cette réponse au moins dans le cas où les deux villes sont distantes de 100 km : calculer le temps aller, le temps retour, et calculer la vitesse moyenne comme d'habitude, c'est-à-dire comme rapport $\frac{\text{distance totale}}{\text{temps total}}$.

Les calculs montrent alors que la vitesse moyenne n'est pas de 45 $km.h^{-1}$, mais bien moins ($\approx$ 31 km/h).

M. : Alors, qu'en dites-vous ? Que se passe-t-il ? Déjà avec 100 km ça a l'air de poser un problème non ?
E1 : Mais..... c'est parce qu'on a pris 100 km...
E2 : Ben ça marche pas !
M : Et si ça marche pas, c'est à cause de quoi ?
E1 : On a pris 100 km...
E2 : Non, déjà ça marche pas avec 100 km, alors...

......

Le choix des 100 km semble déjà instaurer une rupture de contrat : s'il est vrai qu'une des finalités des mathématiques est d'obtenir des résultats suffisamment généraux et universels, les élèves semblent peu habitués à tester d'abord les cas particuliers. Qui pourrait le leur reprocher, quand on sait qu'ils s'entendent facilement dire : "Tu as fait ta figure dans un cas trop particulier, et tu utilises des hypothèses qui sont sur ta figure, mais pas dans l'énoncé !".

M : Et bien en gros, ça marche pas, pour l'instant ça veut dire que la vitesse moyenne sur tout le trajet n'est pas la moyenne des vitesses aller et retour. Là au moins, vous êtes d'accord ?
Ei : Mmh... oui, d'accord...
E3 : (levant la tête, avec un air de "je le vois mais je ne peux pas y croire !") Mais Madame..... c'est possible que... ce soit pas possible ????.........

M. : Chtt .... alors toi, tu trouves que ce n'est pas possible, alors dis-nous donc ce qui te fais dire....
E3 : Mais c'est parce que j'ai calculé !
M. : Oui, alors dis-nous ce que tu as calculé !
E3 : J'ai calculé le temps ! Le temps qu'il met à l'aller, 100 km à 20 $km.h^{-1}$, ça fait 5 heures, donc pour l'aller retour il met forcément plus de 5 heures... et ça donne comme vitesse $200 \div 5 = 40$ $km.h^{-1}$ ...... il pourra pas aller à plus de 40 $km.h^{-1}$!!?!..... c'est possible ça ?

L'air de rien, cette élève vient de proposer de façon non formalisée une majoration de la vitesse : dans le meilleur des cas, voici ce qui se passe... Elle semble disposer d'une conception fonctionnelle et dynamique de la vitesse (ce n'est pas qu'une formule statique) et s'autorise de plus une perte d'information conséquente qui cependant ne nuit en rien à la véracité de ce qu'elle annonce (et c'est une démarche plus analytique qu'algébrique). On peut se demander d'où vient l'incrédulité de cette élève : c'est une élève en général assez sûre de ce qu'elle avance, à l'aise avec les calculs numériques, le doute qu'elle exprime ne porte donc pas sur le résultat du calcul, mais bien sur son interprétation. Est-ce alors parce qu'elle annonce à peu de frais (raisonnement simple et limpide) que c'est impossible, ce qui est somme toute peu courant dans la culture scolaire ? (ce que semble confirmer sa première question : "*c'est possible que... ce soit pas possible ????.........*").

E1 : Mais ça c'est parce qu'on a pris 100 km...... si on prenait plus.....

.... brouhaha............

Le choix des 100 km semble effectivement semer le doute sur la méthode de l'élève E_3.

M. : (reprend en détaillant le raisonnement et l'écrit au tableau) Et bien, qu'est-ce que tu en penses ?

E3 : ?!?...... Et bien ça veut dire que c'est pas possible, puisqu'il ne dépassera jamais 40 $km.h^{-1}$!

..... un grand silence dans la classe......

M. : Et bien voilà ! Bon, je reprends : (détail du raisonnement et réécriture de la vitesse moyenne : 200/t £ 200/5 = 40 puisque t > 5) ... vous êtes d'accord avec cette écriture ?

Ei : Ben... oui !

E1 : Non, mais c'est parce qu'on a pris 100 km !!!

........Brouhaha, ben oui, ben non ....

M. : Bon alors un peu de calme là, parce qu'il y a plusieurs choses importantes à comprendre ! Alors - avec 100 km - il faut bien reconnaître que ce ne sera effectivement pas possible... on vient d'apprendre deux choses importantes, et vous pouvez l'écrire en rouge sur votre cahier : d'une part la vitesse moyenne sur tout le trajet n'est pas la moyenne des vitesses, d'autre part, il semble que ce soit impossible... alors le fait qu'on ait pris 100 km, on va voir ça de plus près... mais... les autres, qu'est-ce qui vous gêne là ?

La question du choix de 100 km a bien été entendue, et cela est signifié à l'élève E_1 et repris un peu plus tard (certainement de façon trop rapide) : il s'agit pour l'instant de recentrer les enjeux, et l'enseignant s'attend un peu à une réaction à propos de cette conclusion qui n'exhibe pas un calcul direct comme le veut la coutume scolaire.

......

E6 : Mais non, moi ce que je comprend pas c'est que... enfin je suis bien d'accord avec ces calculs mais... !

M. : Bon, alors vas-y, c'est important, essaie de nous expliquer ce que tu ne comprends pas...

E6 : .... Enfin, un calcul..... je comprends pas comment un calcul peut nous montrer que ... Un calcul, je sais pas moi, j'aurais bien vu qu'on ait trouvé, je sais pas... 500 km.h^{-1} par exemple, et ça d'accord c'est pas possible mais là non .... là vraiment ...... voilà, c'est ça, je comprends pas qu'un calcul puisse nous prouver que quelque chose est impossible !

..... Silence et hochements de tête dans la classe.....

M. : Bon !.... Et bien c'est très important ce que tu viens de nous dire là ! En plus, je trouve que tu le dis vraiment très bien : si on fait un calcul, on doit pouvoir trouver un résultat, alors par exemple 500 km.h^{-1} qui ne serait effectivement pas possible pour nos petites jambes... mais qu'on n'ait pas de résultat pour la vitesse du retour, et que ça démontre quand même que ce n'est pas possible, ça, c'est vraiment difficile à accepter, c'est bien ça que tu dis ?
E6 : Oui, oui, c'est ça.
......
M. : Alors... c'est peut-être dur à "avaler", mais... tu es d'accord avec les calculs qu'on a fait là ... avec les vitesses moyennes ?
E_6 et d'autres : Oui, oui... ça prouve qu'avec 70 ça marche pas !
M. : Bon, et avec le raisonnement ici... il est pourtant limpide non ?
E6 : Ben oui, je suis d'accord aussi, mais...
M. : D'accord ! Mais... c'est un peu difficile à accepter !... Mais... il y en a qui ont fait un peu de vélo parmi vous ? Ça ne vous est jamais arrivé ça, de traîner un peu trop à l'aller, et du coup, et bien, vous avez beau pédaler au retour, vous n'arrivez pas à tenir le temps que vous aviez prévu !... Et ici, ce qu'on a montré, c'est que vous pouvez même aller à la vitesse de la lumière, vous n'y arriverez pas !
E7 : Et oui, c'est ça !!!... il a trop traîné à l'aller, il y arrivera pas !
M. : Bon et bien je vous laisse un peu mijoter ça... jusqu'à ce soir, parce que ça va sonner. En module ce soir, on regardera ce que ça donne si on n'avait pas pris 100 km. (sonnerie)

Le retour à la réalité proposé par l'enseignant peut sembler une volonté de l'enseignant de se placer sur le terrain des élèves : celui du cadre "concret" de la situation ; en réalité, la séance approchait de sa fin, et il fallait clore provisoirement ce débat : cette première partie a en effet duré une heure. On peut noter le décalage entre les conceptions : formule servant à donner un résultat numérique pour l'élève E_6 et d'autres, et modèle algébrico-fonctionnel de la situation qui permet la manipulation des écritures pour l'enseignant et les élèves E_3 et certainement E_1 également.

En revenant en module le soir, E_6 est toujours tracassée, et après le rappel de ce qui s'était passé le matin, elle reprend à l'endroit où elle s'était arrêtée comme si elle n'avait rien fait d'autre de la journée ! (ce qui n'est pas le cas bien évidemment car les heures de cours se sont succédées) :

E6 : Mais madame, comment on fait alors pour... parce que moi vraiment j'aurais dit comme Dorothée ce matin, 70 km.h^{-1}*, j'étais vraiment persuadée... alors même si je vais à la vitesse de la lumière, je n'y arriverai pas ?*

M. : Ben oui ! Tu peux même la dépasser si ça te chante, pas moyen, tu n'y arriveras pas ! C'est pour cela que l'exercice s'intitulait : Arrête de pédaler !

E6 : ....

M. : Bon, alors ce matin, il nous restait à voir l'histoire du 100 km : c'est important ou pas ces 100 km ?

Suit une mise au point : on prend une distance d au lieu de 100 (mais peut-être aurait-il fallu hiérarchiser un peu les essais numériques : d = 100, d = 50, d = 500, et passer ensuite au cas général ?), on exprime le temps total (temps aller : d/20, temps retour : d/v où v désigne la vitesse du retour) la vitesse moyenne aller retour V en fonction de v et de d... qui se simplifie ! $\left(V = \frac{2d}{d/20 + d/v}\right)$. Ce qui signifie dans un premier temps que cette vitesse ne dépend pas de la distance. D'autre part, on adapte le raisonnement proposé le matin, qui est toujours aussi valable, et qui prouve que la vitesse retour ne peut dépasser 40 : $V = \frac{2d}{d/20 + d/v}$ £ $\frac{2d}{d/20} = 40$ (distance totale divisée par temps de l'aller, ce qui ne fait que formaliser dans le cas général ce que disait l'élève E_3 le matin : "*pour l'aller retour il met forcément plus de 5 heures... et ça donne comme vitesse 200÷5 = 40 km.h*$^{-1}$"). L'impossibilité n'est donc pas liée au fait qu'on ait pris 100 km pour la distance, et seul le passage à l'écriture de la vitesse moyenne totale peut le démontrer, en démontrant même un peu plus : la vitesse moyenne totale ne peut dépasser 40 km.h^{-1}, quelle que soit la longueur du trajet.

E6 : Mais alors... non vraiment ! Même si je mets..... 5 heures à l'aller et 1 heure au retour ?...

M. : Bon, et ça fait combien comme vitesse moyenne ça ?

E6 : ... (calcule)... ah oui...

Il a quand même fallu calculer la vitesse moyenne avec une distance de 100 km et d'autres temps de retour pour que finalement les plus réticents soient - presque (?) - persuadés !

Ce qui précède dénote au moins deux choses : d'une part, au point où en sont ces élèves, un calcul ne saurait démontrer une impossibilité sans résoudre une équation qui donne un résultat numérique interprétable, d'autre part que l'écriture algébrique possède pour eux une faible valeur de preuve, puisqu'il a fallu retourner dans le cadre numérique (disons au problème "pseudo" concret et aux grandeurs distance et temps plus familières que la vitesse) pour recalculer exactement la vitesse moyenne totale dans plusieurs cas.

En s'intéressant au temps (variable désignée par l'élève E_3), il aurait été possible de faire calculer le temps de retour et la vitesse de retour par une mise en équation, et la résolution d'un système (avec d = 100 km ou un paramètre d quelconque) ; on trouve alors un temps négatif (-5/9 d'heure) et une vitesse retour de - 180 km/h, et on peut émettre l'hypothèse que l'interprétation de ce résultat dans le cadre de la situation aurait davantage convaincu l'élève E_6. Mais cette procédure n'a pas été observée, même après avoir fixé la distance d à 100 km, il est probable que c'est parce qu'elle nécessite une mise en équation assez complexe pour ce niveau d'enseignement et à ce moment de la séance et de l'année (n'oublions pas qu'au début de l'heure, les élèves étaient massivement persuadés que la vitesse moyenne aller-retour était la moyenne des vitesses de l'aller et du retour !).

Les paramètres les plus faciles à se représenter à ce niveau étant certainement la distance et le temps, on aurait pu proposer d'autres scénarios, comme par exemple proposer des vitesses moyennes ou d'autres temps pour le retour (comme le suggère d'ailleurs l'élève E_6), le calcul aurait effectivement donné une réponse numérique soit pour le temps retour, soit pour la vitesse moyenne aller-retour, qui aurait montré plus facilement que le problème semblait "toujours" impossible, le passage à la formule algébrique de la vitesse de retour $V = \dfrac{2}{\dfrac{1}{20}+\dfrac{1}{v}}$ et sa minoration (en majorant le temps total) fournissant alors une explication possible du phénomène.

Ou encore, à partir de plusieurs valeurs de la vitesse du retour, faire calculer effectivement, à partir de la formule $V = \dfrac{40v}{v+20}$ ou non, différentes vitesses aller-retour, ce qui semble davantage adapté à une problématique de limite[1], et aurait peut-être arrêté le questionnement des élèves, puisqu'on a vu qu'il est déjà assez déraisonnable pour un élève d'envisager des vitesses insensées pour le retour :

v	0	5	10	15	30	60	100	200	500
V	0	5	13,3	17,1	24	30	33,3	36,4	38,5

Ou enfin, élargir le problème en autorisant la manipulation de la variable didactique "vitesse aller", et faire calculer les vitesses de retour ($v_r = \dfrac{90v_a}{4v_a - 90}$) pour que le problème soit possible (aller-retour à 45 km/h), ce qui a l'avantage de réintroduire de la contingence, et donne :

Vitesse aller	0	5	10	20	22,5	25	30	45	50
Vitesse retour	0	- 6,43	- 18	- 180	∞	222,5	90	45	40,9

Dans ce cas, pour les vitesses de 5 et 10 km, hormis le signe de la vitesse, les ordres de grandeurs obtenus sont plausibles pour un cycliste. Qu'en diraient les élèves ? Serait-il possible de les faire argumenter sur les signes et le cas du zéro ?

---

[1] On peut d'ailleurs utiliser cette situation dans une problématique d'entrée dans l'analyse, mais il faut alors la présenter autrement.

Il est certain cependant que le fait que le retour soit impossible et l'impossibilité ou improbabilité d'obtenir une résolution algébrique jouent un rôle majeur dans le déroulement de la séance, et permettent l'ouverture d'un débat autour d'une méthode de preuve importante, et manifestement discutable pour les élèves, ainsi que son institutionnalisation. Et compte tenu de l'effet de rupture rencontré ici, il peut s'agir d'une tâche motivante (au sens de Chevallard) pour un travail ultérieur aussi bien sur le raisonnement, les démarches de recherche et de preuve, et le rôle de l'algèbre (entre autres). Un autre choix serait de ménager aux élèves des petits escaliers pour franchir une à une les étapes...

En ce qui concerne le calcul comme moyen de preuve : on peut d'un côté faire l'hypothèse que le passage du numérique à la généralisation algébrique permet de conférer au calcul une valeur de preuve, avec le risque des généralisations abusives, où les élèves multiplient les "erreurs" de calcul pour se mettre en accord avec ce qu'ils pensent devoir démontrer ou ce dont ils sont persuadés, comme on peut l'observer assez couramment. Mais d'autre part, la majorité des élèves semblant tellement ancrée dans la situation "réelle", si l'énoncé avait été posé dans certains des termes ci-dessus, cet épisode n'aurait alors certainement jamais eu lieu, une hypothèse antagoniste étant que le problème est fini lorsqu'on a dépassé les limites du raisonnable pour les vitesses de retour ! Or il faut bien reconnaître que c'est une grande chance quand dans une classe il y a des élèves qui expriment aussi bien ce qui les empêche d'avancer : ici on peut dire que l'intervention de cette élève a vraiment été utile pour tout le monde, même si la dévolution du modèle algébrico-fonctionnel de la situation n'est pas évidente, elle n'a certainement pas fait moins de mathématiques que celle qui a eu la vision fulgurante d'une impossibilité. Ce type de situation me paraît essentiel : dans d'autres situations plus confinées, personne dans cette classe - et dans des classes supérieures a fortiori - n'aurait été surpris de trouver qu'une équation donnée n'a pas de solutions, ou une solution négative (par exemple après l'étude des équations du second degré, même en première), mais ici l'impossible prend toute sa dimension : l'impossible mathématiquement prouvé d'une part, et l'impossible disons "psychologique" et/ou "culturel" auquel se heurte cette élève (culturel au sens où, dans la culture scolaire, il n'est pas si courant de traiter des problèmes n'ayant pas de solution d'une part, et quand ils sont traités, ils le sont plutôt par simple résolution d'équation, avec ou sans solution).

II.2 - De la nécessité "d'écrire" pour "décrire".

La somme des angles d'un triangle vaut 180°... c'est vraiment acquis par tout le monde en seconde direz-vous. Et bien oui et non ! Dans un contexte où les mesures sont données, oui, effectivement, aucun problème pour calculer le troisième angle d'un triangle sans que cela ait été demandé, même s'il s'agit d'un triangle isocèle, si on en a besoin pour calculer autre chose. Mais cette connaissance ne semble pas opératoire quand il s'agit d'un pas de démonstration en géométrie, faisant intervenir une résolution (semi-)algébrique, comme l'illustre l'exemple ci-dessous :

Enoncé : *(la figure n'était pas donnée mais à construire, et les angles non nommés par des lettres)*

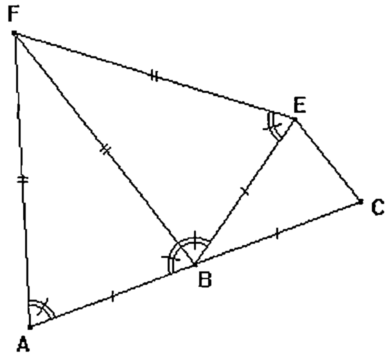
ABF est un triangle isocèle tel que :

FA = FB = 5 cm et AB = 3 cm.

1) **Construire le triangle FBE symétrique de FBA par rapport à la droite (FB), et le point C, symétrique de A par rapport à B.**

2) **Démontrer que $\widehat{CBE} = \widehat{AFB}$**

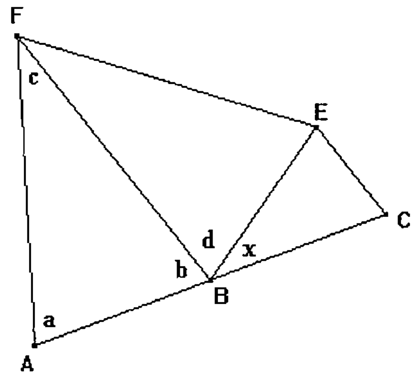
3) **Calculer CE.**



Cet exercice a été donné après avoir travaillé sur les triangles semblables, bien après l'élaboration du cours et une série d'exercices et d'activités de recherche : il s'agit de démontrer que les triangles AFB et EBC sont semblables pour ensuite calculer EC, les élèves sachant ou étant censés savoir que deux triangles isocèles ayant le même angle au sommet sont semblables.

En ce qui concerne l'égalité des angles $\widehat{CBE} = \widehat{AFB}$, il s'agit donc ici de "voir" d'une façon ou d'une autre, que l'angle $\widehat{CBE}$ tout comme l'angle $\widehat{AFB}$ s'obtient comme un angle plat moins deux angles deux à deux (et même tous) égaux ! Ou encore que les supplémentaires des angles $\widehat{CBE}$ et $\widehat{AFB}$ sont égaux, et ce pour des raisons différentes. Les moyens d'y parvenir sont soit de coder les angles, soit de nommer les angles par une lettre, ce qui constitue une autre façon de coder les angles, mais d'une façon exploitable en algèbre et permettant d'utiliser des égalités d'angles, soit encore d'obtenir un raccourci en utilisant les deux types de codages. Dans un cas comme dans l'autre, la "lecture" et "l'écriture" de la figure doivent être orientées en fonction du but poursuivi : trouver des éléments communs permettant d'établir l'égalité des deux angles.

Formellement, pour un codage permettant un traitement algébrique, cela donne :



Sommes des angles supplémentaires (les points ABC étant alignés puisque B est le milieu de [AC])	b + d + x = 180 (1)
Somme des angles du triangle AFB	a + b + c = 180 (2)
Angles du triangle isocèle AFB	a = b (3)
Angles symétriques	b = d (4)

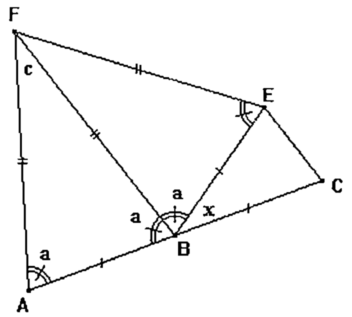
De façon exhaustive et un peu mécanique :

Par transitivité (avec 180) et par substitution, on obtient 2b + c = 2b + x d'où c = x.

Par additivité ((2) - (1)), il vient d - a + x - c = 0, or par transitivité, a = d d'où x - c = 0 et x = c.

Avec un peu plus de souplesse (et/ou stratégie de codage mixte), en exprimant les angles x et c pour les comparer : c = 180 - a - b , x = 180 - b - d ; comme a = b et b = d on a x = c.

On peut envisager un codage mixte : il est maladroit en effet de multiplier les désignations des angles qui alourdissent la résolution, puisqu'il est assez immédiat, à partir des données explicites de l'énoncé, de déduire des égalités d'angles. Le codage le plus adapté serait donc celui ci-contre, donnant par "lecture" immédiate x = 180 - 2a et c = 180 - 2a, d'où x = c.



Et c'est bien une stratégie mixte qui permet de gérer au mieux ces pas de démonstration : codage des angles pour les données explicites (symétrie, triangle isocèle) et désignation par une lettre pour les données implicites (somme des angles d'un triangle et somme des angles supplémentaires). Or ce sont précisément ces données implicites (que l'on peut penser mobilisées dans un temps second) qui permettent le traitement de la partie calculatoire de la preuve, le problème étant que les 180° de l'angle plat, et les 180° de la somme des angles d'un triangle ne semblent pas avoir le même statut tant que l'on ne passe pas dans un cadre numérique.

En réalité, la figure a été faite correctement dans l'ensemble, et même codée par une majorité d'élèves (point sur lequel il avait été insisté lourdement depuis le début de l'année comme démarche heuristique) et cependant :

- Des élèves qui ont correctement codé leur figure n'ont absolument pas "vu" que l'angle $\widehat{CBE}$ tout comme l'angle $\widehat{AFB}$ s'obtenait comme un angle plat moins deux angles égaux !

- Parmi ceux qui l'ont "vu", beaucoup ont été gênés par le fait de ne pas avoir la mesure des angles, et ont donc :

  - soit calculé l'angle $\widehat{CBE}$ après avoir mesuré l'angle $\widehat{AFB}$ et calculé les angles $\widehat{FAB}$ et $\widehat{FBA}$ sans penser à nommer l'angle $\widehat{FAB}$ par exemple, (mais à ce moment là, pourquoi ne pas les mesurer tous les deux, sinon par pur effet de contrat ? On demande effectivement de démontrer quelque chose !)
  - soit calculé encore l'angle $\widehat{FAB}$ en faisant intervenir la hauteur du triangle AFB, et continué à calculer les autres angles en prenant pour $\widehat{FAB}$ la valeur approchée trouvée.

- soit essayé de calculer la mesure de $\widehat{ACE}$... en travaillant dans le triangle rectangle AEC où il n'y a aucune mesure d'angle à part l'angle droit, et aucun côté connu à part l'hypoténuse. (ces élèves n'ont cependant pas hésité à enrichir la figure en faisant appel au cercle circonscrit... mais cela n'a mené à rien ici puisque ni AE ni EC ne sont connus... le calcul de EC étant d'ailleurs le but final de l'exercice).

- D'autres enfin ont essayé d'y échapper en affirmant purement et simplement que les triangles AFB et CBE étaient semblables et que par conséquent les angles $\widehat{AFB}$ et $\widehat{CBE}$ sont égaux, alors que c'est cette égalité d'angles qui devait permettre d'établir que ces triangles sont semblables.

La connaissance "La somme des angles d'un triangle vaut 180°" ne semble donc pas opératoire dans un contexte de démonstration, où un pas de démonstration nécessite un calcul algébrique, même simple, et où autre chose "fait du bruit" : ici en l'occurrence, comme on l'observe fréquemment, les connaissances sur les triangles semblables n'étant pas bien stabilisées, le codage n'a servi à rien, et dans beaucoup de cas, la connaissance de la somme des angles d'un triangle n'est pas mobilisable pour démontrer que des angles sont égaux, sauf à disposer de la mesure de l'angle pour faire des calculs effectifs. Le contexte de l'exercice y poussait peut-être, puisqu'on demande de calculer effectivement un côté (on attend donc in fine un résultat numérique), alors que les calculs d'angles explicites sont impossibles (mais certains élèves ont développé des débuts de stratégie élaborée pour y parvenir !). Peut-on mettre ceci en relation avec un possible rabattement trop précoce de l'étude des grandeurs sur le calcul de leur mesure, ainsi que le suggère Michèle Artigue [1], dans la mesure où les 180° d'un angle plat et les 180° de la somme des angles d'un triangle ne semblent pas endosser le même statut en dehors d'un cadre purement numérique et ne permettent pas de comparer deux angles sans calculer explicitement leur mesure ?

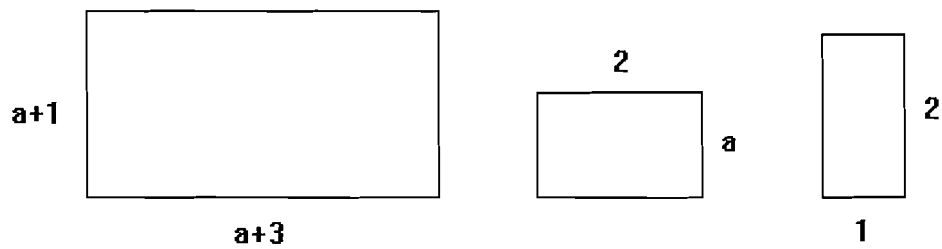
III - D'autres situations proposées en seconde à propos du calcul algébrique.

Les situations ci-dessous se veulent donc une familiarisation avec ces écritures algébriques, vues soit comme modélisation (ou plus simplement ici mise en équation) d'une situation et une illustration de leur valeur opératoire et démonstrative, devant laquelle des élèves de lycées semblent réticents, demandeurs qu'ils sont - mais non sans raison - à leur arrivée en seconde d'exercices plutôt courts, formels, de gammes de développements, factorisations et autres identités remarquables. Certes... mais pour quoi faire ? Il y a donc ici plusieurs questions posées, plusieurs problèmes à résoudre, non évidents, non immédiats. Il n'y a là rien de nouveau, pas de "leçon", pas de résultat, de formule ou de théorème à apprendre, pas de problème original (les thèmes sont classiques), pas de prouesse technique non plus, et pourtant, ce type travail dans la durée me paraît aujourd'hui essentiel. En effet, comment espérer passer à des mathématiques plus conséquentes dans la suite - les programmes de première et de terminale souffrent aussi de cette "impossibilité" d'écrire les choses et de manipuler les écritures pour les "faire parler"... - je pense par exemple à certains concept d'analyse, mais pas seulement - sans un minimum de familiarité avec ces écritures et sans un minimum de confiance dans leur valeur de preuve ? Sans cette familiarité, l'esprit ne reste-t-il pas encombré et indisponible pour réfléchir aux nouvelles questions qui se posent, buttant sans cesse sur la première difficulté venue ?

Peut-on dire que pour pouvoir entrer dans une démarche scientifique qui doit mener à une modélisation ou mise en équation d'une situation, il faudrait pouvoir se placer dans la posture intellectuelle suivante : une écriture mathématique intègre cette méfiance primordiale que nous avons tous plus ou moins dans un premier temps d'une telle démarche, mais qu'une fois les choses écrites - et "bien" écrites, ainsi que je l'ai dit plus haut - on peut alors se laisser aller à avoir confiance dans l'écriture, et le doute n'est plus de mise ? Encore faut-il alors disposer d'une conception riche - intégrant un versant fonctionnel - et d'une certaine maîtrise dans la manipulation finalisée des écritures, tout en admettant par ailleurs qu'une écriture peut toujours être remise en question, qu'elle est d'une certaine façon toujours à "remodéliser" autrement (de façon interne : regroupement de termes, déplacement de parenthèses, même invisibles, différentes formes des écritures, et de façon externe : représentations graphiques, vérifications numériques par exemple), ces changements de point de vue procurant un certain contrôle susceptible réduire le doute.

Les situations qui suivent ont été abordées en classe, le but poursuivi étant de mettre les élèves en situation d'avoir à manipuler des écritures algébriques de façon finalisée, puisque les différentes formes de ces écritures n'ont pas toutes la même pertinence pour répondre aux différentes questions posées. Il est évident qu'un élève de seconde ne peut ni trouver, ni comprendre seul la totalité de la démarche proposée, et que seule la réflexion commune d'une classe, constamment éclairée par l'enseignant sur le sens de la démarche, voire même "téléguidée" par moments au besoin, peut les inciter à aller jusqu'au bout. Et ce que j'ai pu constater, c'est qu'ici, le temps didactique ne piétine pas, que les élèves restent effectivement "accrochés" jusqu'au bout, malgré des moments de découragement où il trouvent les choses difficiles, certains d'entre eux ont même demandé à retravailler certains passages bien ciblés en aide individuelle.

III.1 - Des rectangles (inspirée des suivis scientifiques de 3ème)



a est un nombre positif désignant un des côtés du second rectangle, l'unité est le centimètre.

1) Montre par le calcul que la somme des aires de ces trois rectangles est égale à l'aire d'un rectangle dont un côté mesure a + 1 cm.

2) Peux-tu trouver a pour que cette aire commune soit égale à 4 cm^2 ?

On peut envisager 3 stratégies possibles pour la première question :

- $S_{découpe}$: une stratégie utilisant le dessin, en "recollant" même mentalement les rectangles pour en faire un seul. La réponse est alors immédiate : l'autre côté doit mesurer a + 5 cm.
- $S_{découpe\text{-}dév.}$: une stratégie combinant la stratégie S_0, le calcul de la somme des 3 aires et la preuve en développant que les deux expressions désignent la même chose : la somme des trois aires s'écrit $(a+1)(a+3) + 2a + 2 = a^2 + 6a + 5$ et l'aire du rectangle reconstitué est $(a+1)(a+5) = a^2 + 6a + 5$.
- S_{alg} : une stratégie plus explicitement algébrique. Il s'agit :
  - ➔ (S_{alg}-y) soit d'écrire l'aire du rectangle cherché $(a + 1)\times y$ et d'en tirer y,
  - ➔ (S_{alg}-fact) soit plus "simplement" de reconnaître que l'on peut mettre a + 1 en facteur dans l'expression de l'aire totale : $A = (a + 1)(a + 3) + 2a + 2$, ce qui ne se "voit" pas immédiatement non plus, puisque pour espérer le voir, il faut encore penser à mettre un 2 en facteur (factorisation en deux temps).

Après plusieurs observations dans des classes différentes :

- La stratégie S_0 peut-être proposée par certains élèves, mais d'autres ne savent pas s'ils doivent l'accepter ou non, trouvant que "ce n'est pas une démonstration" ! (Mais il est vrai que l'énoncé ne l'autorise peut-être pas, puisqu'il mentionne "par le calcul" encore que le résultat a + 5 nécessite un calcul, mais trop simple peut-être !...). Le professeur peut être alors interrogé sur la légitimité d'une telle procédure de découpage, et sur la validité de la preuve.

- Si la stratégie S_0 n'apparaît pas, la stratégie S_1 peut apparaître après avoir posé la question "Est-ce que le dessin peut vous aider ?", autorisant ainsi la manipulation du dessin qui peut sembler interdit par l'énoncé.

- La stratégie S_2-y apparaît : certains élèves tentent d'écrire l'aire du rectangle $(a+1)\times y$, mais ceci n'aboutit pas complètement puisque pour tirer y, il faut alors diviser $(a+1)(a+3) + 2a + 2$ ou encore $a^2 + 6a + 5$ par $(a+1)$: certains élèves proposent $y = \dfrac{a^2 + 6a + 5}{a + 1}$ sans interprétation possible. D'autres se noient dans les calculs.

- La stratégie S_2-fact apparaît beaucoup plus rarement - mais apparaît tout de même - elle suppose une reformulation de "l'aire d'un rectangle de côté a+1" en termes de produit de (a+1) par autre chose, tout comme $(a+1)\times y$, non pas en essayant de calculer y, mais par identification de facteurs, ce qui semble déjà plus élaboré et plus conceptuel. Il est alors possible de reprendre le calcul de y de la stratégie S_2-y en choisissant non pas l'expression développée de l'aire totale, mais son expression semi-factorisée, qui permet une simplification :

$$y = \frac{(a+1)(a+3)+2a+2}{a+1} = \frac{(a+1)(a+5)}{a+1} = a+5,$$

mais le calcul étant plus complexe, cela semble bien plus difficile. De plus, une fois explicitée, la stratégie S_2-fact semble plus convaincante a posteriori, car "plus simple", mais "il fallait y penser" !

Que l'aire commune ne puisse pas être égale à 4 (question 2) n'est pas immédiat non plus : à condition que l'enseignant l'ait repris à son compte (et donc autorisé), certains élèves pensent alors à "découper" le premier rectangle, qui donne une aire au minimum de 3, à laquelle on ajoute l'aire du dernier rectangle, d'où une aire totale au minimum égale à 5 ce qui correspond, du point de vue algébrique à : si a est un nombre positif, alors $(a+1)(a+5) \leq 5$, et du point de vue de la dynamique de la figure cela consiste à envisager le cas limite $a = 0$. On peut envisager une autre stratégie algébrique, la plus "évidente" du point de vue de l'écriture étant ici celle qui utilise l'écriture développée : $A = a^2 + 6a + 5$, puisque a est un nombre positif. Certains élèves ayant eu le "réflexe conditionné" de développer automatiquement l'expression de l'aire, puisque c'est ce qu'ils savent faire le plus facilement, fournissent cependant effectivement cet argument.

En début d'année, dans un dispositif "classique" d'enseignement, ce type d'exercice peut provoquer quelques remous dans une classe ! Question de contrat : "Mais j'ai jamais fait ça !", "Je l'aurais jamais trouvé tout seul !"... et la question classique "Est-ce qu'on aura ça au prochain contrôle ?" ! Il faut alors calmer le jeu, rassurer un peu, clarifier aussi, jusqu'à la prochaine fois...

III.2 - La méthode de Diophante pour trouver deux nombres dont on connaît la somme et le produit.

Ce problème a été testé de façon classique en demi-groupes dans une classe de seconde, à l'intérieur d'un module intitulé "Choix de l'inconnue", avec mise en commun et institutionnalisation après chaque question, sous la forme classique suivante :

- **On voudrait trouver deux nombres, connaissant leur somme 50, et leur produit, 589. On désigne par x l'un des deux nombres. Montrer que x est solution de l'équation $x^2 - 50x + 589 = 0$.**
- **Diophante, mathématicien grec du III^e siècle avant J.C., propose une autre méthode : il utilise le fait que si deux nombres ont pour somme 50, alors l'un peut s'écrire 25 - a et l'autre 25 + a. Justifier cette affirmation, puis montrer que a est solution de l'équation $a^2 = 36$. Résoudre cette équation, et en déduire les deux nombres cherchés.**
- **Donner si cela est possible les dimensions d'un rectangle de périmètre 20 cm et d'aire 18,75 cm^2.**

Même question avec un périmètre de 20 cm et d'aire 20 cm^2.

a) Les modèles algébriques de la situation : recherche de deux nombres.

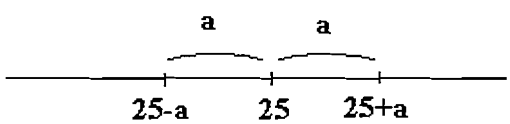
Il n'a pas été demandé aux élèves de "trouver" les deux nombres : il est évident qu'il était possible de les trouver assez rapidement par essais numériques successifs et/ou systématiques, le nombre 25 serait d'ailleurs certainement apparu à certains comme limitant le nombre d'essais à faire, compte tenu de la symétrie du problème.

Il est donc proposé une mise en équation menant à une équation impossible à résoudre en seconde :

$$\begin{cases} x + y = 50 \\ xy = 589 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 50 - x \\ x(50 - x) = 589 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 50 - x \\ x^2 - 50x + 589 = 0 \end{cases}$$

Il s'agit d'un premier modèle de la situation, modélisation brute (ou brutale ?) prenant comme inconnues les deux nombres cherchés, mais impossible à traiter avec les outils disponibles (le trinôme du second degré n'étant pas une identité remarquable, la résolution de telles équations est reportée à l'année suivante, sauf à introduire la technique : "forme canonique"). Il y a cependant ici déjà l'idée de remplacer les deux inconnues par une seule.

Après des essais de résolution infructueux de la classe, l'idée de Diophante est alors proposée pour se tirer de ce mauvais pas. Cette méthode de Diophante est déjà consistante à elle seule, et soulève beaucoup de questions : il s'agit d'une modélisation de la situation portant sur l'écart à leur moyenne (ou distance au milieu de l'intervalle dont les bornes sont ces deux nombres), qui utilise également l'idée de réduire le problème à une seule inconnue, mais d'une autre façon :



Diophante utilise la symétrie du problème, et situe les deux nombres cherchés, dont la somme est 50, par rapport à leur moyenne 25 ou le milieu de l'intervalle dont ils sont les extrémités : puisque ces deux nombres ne sont pas égaux (leur produit serait alors 625), il y en a forcément un plus grand que 25, que l'on peut écrire 25 + a et l'autre plus petit, que l'on peut écrire 25 - a.

Les élèves ont donc à "justifier" ceci : mais que signifie "justifier" pour un élève de seconde ? Cela se traduit essentiellement et majoritairement par : « Oui, Diophante a *juste* puisque 25 + a + 25 - a = 50 » et pratiquement jamais par « l'un peut s'écrire 25 + a, l'autre 25 - a' , et comme la somme vaut 25, on a forcément 25 + a + 25 - a' = 0 donc a = a' ». Les élèves perçoivent sans doute la symétrie du problème, mais ceci n'est absolument pas verbalisé. D'autre part, ils ne formulent pas seuls le raisonnement sous-jacent : "les deux nombres ne peuvent pas être tous les deux plus petits que 25, sinon leur somme serait plus petite que 50, ni tous les deux plus grands que 25 sinon leur somme serait plus grande que 50. Il y en a donc un plus petit que 25, et l'autre plus grand". Cependant, si la question est posée, ils savent conclure à l'aide de l'argument sur la somme, mais il est vrai que nous sortons ici du terrain traditionnel et privilégié de la preuve qu'est le domaine de la géométrie.

Cette deuxième modélisation est plus opératoire que la première, puisqu'elle mène à une équation simple que l'on sait résoudre en seconde.

D'autres scénarios sont envisagés, mais n'ont pas été testés pour l'instant, par exemple le suivant, plus progressif et constructif, et peut-être plus adapté à une entrée des élèves dans le jeu de l'écriture, la méthode de Diophante proposée ci-dessus pouvant sembler un peu "parachutée" :

- choisir des nombres plus grands en précisant que l'on recherche des nombres entiers et demander de rechercher ces deux nombres par exploration numérique, les essais devraient mettre en évidence leur moyenne pour le nombre d'essais à faire, désignant en partie le paramètre du modèle de Diophante (par exemple $x = 74$ et $y = 32$ dans un premier temps : somme 106, produit 2368, moyenne 53. Il y a au plus 53 essais à faire, mais on peut aboutir en bien moins d'essais en modulant en fonction du produit obtenu).

- $x + y = 50$ et $xy = 1260$ avec x, y entiers : il n'y a pas de solution, puisqu'on a par exemple $x < 25$ et $y < 50$ donc $xy < 1250$. L'hypothèse faite ici est que ce cas impossible est susceptible de permettre l'analyse du rôle du milieu de l'intervalle [x;y] qui justifiera la méthode de Diophante, tout comme l'étude d'un contre exemple à une conjecture permet souvent de mettre en lumière les obstacles et d'une part de modifier ses hypothèses pour rendre la conjecture vraie, d'autre part d'en trouver une démonstration qui satisfaisante pour l'esprit.

- $x = 27$, $y = 64$ dans un troisième temps : somme 91, produit 1728, moyenne 45,5 ... ce désinvestit la moyenne des deux nombres de son aspect "nombre maximal d'essais", et l'ancre davantage dans sa représentation de "milieu de l'intervalle [x;y]" ;

- choisir des nombres décimaux : le produit est 320 et la somme 38,1 par exemple ($x = 12,5$ et $y = 25,6$) et introduire ensuite les deux modèles (second degré et Diophante) si aucune stratégie de mise en équation n'est apparue, pour en faire discuter la pertinence dans la classe.

- Elargir à des nombres négatifs pour tester la pertinence et la validité du modèle de Diophante...

b) Un modèle géométrique de la situation : recherche de rectangles d'aire et de périmètre donnés.

Il s'agissait ici de réinvestir la méthode de Diophante pour répondre par l'algèbre à une question géométrique. Les élèves voient bien le lien entre aire et périmètre d'un rectangle et somme et produit, mais oublient souvent de diviser le périmètre par 2 !

Par contre, l'habillage géométrique du problème soulève d'autres questions non résolues en seconde à propos d'aire et de périmètre entre autres :

- certains élèves répondent d'emblée qu'un tel rectangle n'existe pas, car son aire ne peut pas être plus grande que son périmètre, "puisqu'on multiplie !" (conception des côtés en nombres entiers)

- même lorsque cela n'est pas observé pour le premier rectangle, on trouve des élèves pour dire qu'il n'est pas possible de trouver un rectangle dont l'aire et le périmètre valent 20, pour la même raison que précédemment (même si la question précédente prouve le contraire, mais ici l'égalité de la valeur mesurant le périmètre et de celle mesurant est peut-être plus immédiatement visible) ;

- enfin, si pour un élève, le rectangle fait partie de l'univers familier du dessin plutôt que de la figure géométrique, le fait de trouver des nombres irrationnels pour les côtés du second rectangle fait dire aussi que c'est impossible (ce qui peut se comprendre : dans un contexte de dessin, $\sqrt{2}$ n'existe pas, mais plutôt son "ombre" décimale 1,4 !).

IV - Conclusion.

Ce travail sur les écritures algébriques a été suivi d'une reprise dans le domaine des fonctions et de leurs représentations graphiques, (une fonction associée à un problème géométrique, entre autres) à l'aide d'un outil de géométrie dynamique, mais la suite fera peut-être l'objet d'un prochain article (y compris pour le niveau 1$^{\text{ère}}$ S).
Si ces situations sont peut-être très critiquables d'une certaine façon (au sens où l'on peut se poser la question de savoir quels "coups" le "joueur élève" peut jouer...mais ce n'était pas le but de mon questionnement), elles me semblent tout de même avoir le mérite de montrer des voies possibles pour des processus qui me semblent incontournables dans un enseignement, et soulèvent des questions essentielles comme : "Quelle place accordons-nous dans l'enseignement d'une notion, d'un concept, d'une méthode, aux techniques et savoir-faire, qui lui sont nécessaires pour être utilisable ?", "Quel degré de familiarisation avec les écritures algébriques d'une part, les processus de modélisation d'autre part, est nécessaire pour qu'un élève puisse commencer à accepter la valeur de preuve d'un calcul " ?

Il s'agissait donc simplement dans un premier temps de proposer des occasions supplémentaires de familiarisation avec une pratique algébrico-fonctionnelle non élémentaire reconnue difficile par les élèves : s'il est vrai que d'un côté, certaines pratiques algébriques doivent parvenir au stade de la routine pour ne pas faire obstacle à l'entrée dans d'autres problèmes et à leur traitement, et donc que par moments, il faut parvenir à se dégager du sens de ce qui est en train de s'écrire, le passage à l'écriture, la manipulation finalisée d'écritures algébrico-fonctionnelles et leur interprétation restent un symptôme de l'enseignement des mathématiques en lycée ("Les élèves ne savent plus calculer" entend-on souvent...) : avons-nous les moyens non pas de faire taire ce symptôme, au moins de le déplacer en l'entendant et... en l'écrivant ?

Le problème de l'écriture, c'est le lecteur...

Bibliographie

[1] ARTIGUE Michèle : Calcul et démonstration, La gazette des Mathématiciens,

n° 84, Avril 2000.

[2] CHEVALLARD Yves. : Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège, Petit X n° 23, 89-90.

[3] JULLIEN Michel, Le calcul algébrique au collège. Etude d'un exemple. Petit X n°24, 89-90.

[4] LEGRAND Marc : Le cycliste (non publié, cassette vidéo IREM de Lyon, transcriptions IREM de Grenoble)