

## Recueil d'exercices n°1

**Exercice 1.** Repérer les assertions (ou prédicats) parmi les phrases suivantes ; le cas échéant, nier l'assertion (le prédicat).

1. Il existe des triangles non rectangles.
2. Pourquoi cette équation n'a pas de solution ?
3. Résoudre l'équation  $x^2 = 2$ .
4. Je sors et toi tu restes.
5. Je pense donc je suis.
6. Si j'avais su, je ne serais pas venu.
7. Tracer deux droites perpendiculaires.
8. Cette fonction est continue mais non dérivable.
9. Tous les entiers relatifs sont des nombres positifs.
10. Comme c'est facile !
11. Une fonction continue qui n'est pas dérivable est dite "crochue".
12. S'il pleut, il prend son parapluie.
13. Tous les habitants de l'Hérault qui prennent le bus vont à Montpellier.
14. Tous les habitants de l'Hérault, qui prennent le bus, vont à Montpellier.
15.  $(\forall x \in \mathbb{R}^*, x > 0)$  ou  $(\forall x \in \mathbb{R}^*, x < 0)$ .
16.  $\forall x \in \mathbb{R}^*, x > 0$  ou  $x < 0$ .
17. Combien de nombres premiers sont inférieurs à 100 ?
18. Si  $x$  est un nombre premier alors il est impair.
19. Il existe une infinité de nombres premiers.
20. Le point d'intersection des deux droites est appelé  $A$ .

**Exercice 2.** Citer le théorème de Pythagore avec une économie des mots.

**Exercice 3.** Étudier la fonction  $f(x) = \sqrt{x}$  : on commencera par critiquer cet énoncé...

**Exercice 4.** Considérer la fonction  $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*, f(x) = 1/x$ . Est-elle bien définie ? Continue ? Dérivable ? Monotone ? Et si la réponse à cette dernière question est positive : préciser si elle est strictement monotone, si elle est croissante ou décroissante.

**Exercice 5.** Fixons des nombres réels  $a, b$  et  $c$ . Pour tout  $f \in \mathbb{R}$ , posons :  $x(f) = bf^2 + cf + a$ .

1. Quelle sorte d'objet mathématique est  $x$  ?
2. Définir le discriminant  $x_+$  de  $bf^2 + cf + a$ .
3. À quelle condition, existe-t-il un nombre réel  $\Delta$ , tel que  $b\Delta^2 + c\Delta + a = 0$  ?
4. Supposons la condition précédente vérifiée :  $\Delta$  est-il unique ?

**Exercice 6.** pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , trouver des formules pour les sommes suivantes ( $r \in \mathbb{R}$ ) :

$$\sum_{k=0}^n k \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n r^k .$$

**Exercice 7.** Montrer que les nombres réels suivants sont entiers :

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right] \quad (n \in \mathbb{N}) .$$

**Exercice 8.** Soit  $X = \mathbb{R}_+^*$  (réels strictement positifs) et considérons la loi  $\star$  définie par :

$$\forall x, y \in X, \quad x \star y = x^y .$$

1. Parmi les assertions suivantes, certaines sont vraies d'autres non. Clarifier les situations.
  - (a)  $\exists a \in X, \forall x \in X, a \star x = x$  ;
  - (b)  $\forall x \in X, \exists b \in X, x \star b = x$  ;
  - (c)  $\exists c \in X, \forall x \in X, x \star c = x$  ;
  - (d)  $\exists d \in X, \forall x \in X, d \star x = d$  ;
  - (e)  $\exists ! e \in X, e \star e = 1$ .
2. Donner la négation de chacune de ces assertions.