Feuille d'exercices 3

1 - EXERCICES INCONTOURNABLES

Exercice 1. Lister tous les éléments de $\mathcal{S}_3$ et de $\mathcal{S}_4$.

Exercice 2. Effectuer les multiplications suivantes :

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 6 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 2 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}^3$

2 - EXERCICES CLASSIQUES

Exercice 3. Calculer les puissances suivantes :

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}^{2019}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 5 & 6 & 9 & 1 & 3 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}^{1823}$

Exercice 4. Démontrer que toute permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ peut s'écrire comme un produit de $\leq n-1$ transpositions. *Indication : procéder par récurrence sur n.*

Exercice 5. On note $\mathcal{A}_n = \{\sigma \in \mathcal{S}_n | \varepsilon(\sigma) = 1\} = \mathrm{Ker}(\varepsilon)$. Montrer que les 3-cycles engendrent $\mathcal{A}_n$.

Exercice 6. Soit $n \geq 2$.

(a) Montrer que les transpositions $(i \;\; i+1)$ pour $1 \leq i \leq n-1$ engendrent $\mathcal{S}_n$.

(b) Montrer que la transposition (12) et le n-cycle $(123\ldots n)$ engendrent $\mathcal{S}_n$.
Indication : on pourra calculer $(12\ldots n)^k(12)(12\ldots n)^{-k}$.