UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER — L2 - ALGÈBRE 3 (HLMA301)

ANNÉE : 2019-2020

# Feuille d'exercices 1

**Exercice 1.** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F_1, F_2$ deux sous-espaces vectoriels. Démontrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(a) la somme $F_1 \oplus F_2$ est directe, c'est-à-dire $\forall u_1 \in F_1, \forall u_2 \in F_2$, si $u_1 + u_2 = 0$ alors $u_1 = u_2 = 0$.

(b) $\forall u_1, v_1 \in F_1, \forall u_2, v_2 \in F_2$, si $u_1 + u_2 = v_1 + v_2$, alors $u_1 = v_1$ et $u_2 = v_2$ (unicité de la décomposition comme somme),

(c) si $L_1$ est une famille libre de $F_1$ et $L_2$ est une famille libre de $F_2$, alors $L_1 \cup L_2$ est une famille libre de $E$,

(d) si $\mathcal{B}_1$ est une base de $F_1$ et $\mathcal{B}_2$ est une base de $F_2$, alors $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est une base de $F_1 + F_2$,

(e) $\dim(F_1 + F_2) = \dim(F_1) + \dim(F_2)$,

(f) $F_1 \cap F_2 = \{0\}$.

On considère maintenant trois sous-espaces $F_1, F_2, F_3$. Montrer que les assertions correspondant à (a), (b), (c), (d), (e) sont équivalentes. Montrer qu'elles impliquent (f), mais que (f) ne les implique pas.

**Exercice 2.** Pour chacune des deux matrices ci-dessous, déterminer le spectre, les sous-espaces propres. Est-elle diagonalisable ?

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

**Exercice 3.** Pour chacune des matrices complexes suivantes,

(a) Donner son spectre.

(b) Donner une base de chaque sous-espace propre.

(c) Dire si elle est diagonalisable.

(d) Quand elle est diagonalisable, calculer sa puissance $n^{\text{ième}}$.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & 4 & 4 \\ 4 & -4 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 4.** Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$. À quelle condition la matrice $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

**Exercice 5.** Soit $\theta \in \mathbb{R}$, on considère la matrice de rotation $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

(a) Faire un dessin justifiant l'appellation "matrice de rotation".
(b) Pour quelles valeurs de $\theta$ la matrice $R_\theta$ est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$ ?
(c) Diagonaliser $R_\theta$ dans $\mathbb{R}$ pour les valeurs trouvées au (a).
(d) Pour quelles valeurs de $\theta$ la matrice $R_\theta$ est-elle diagonalisable dans $\mathbb{C}$ ?
(e) Diagonaliser $R_\theta$ dans $\mathbb{C}$ pour les valeurs trouvées au (c).

**Exercice 6.** Soit $\varphi : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]$ l'application $\varphi(P) = (X+1)P'$.

(a) Justifier que $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{K}[X])$.
(b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ le sous-espace vectoriel $\mathbb{K}_n[X]$ est stable par $\varphi$. On note encore $\varphi$ la restriction de $\varphi$ à $\mathbb{K}_n[X]$.
(c) Écrire la matrice de l'application $\varphi$ dans la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$, puis dans $\mathbb{K}[X]$.
(d) Montrer que l'application $\varphi$ est diagonalisable.
(e) Donner une base de $\mathbb{K}_n[X]$ diagonalisant $\varphi$. Faire de même pour $\mathbb{K}[X]$.

**Exercice 7.** Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Déterminer le spectre de $M$. Trouver un vecteur propre réel $v_1$ de $M$.
(b) Justifier que $M$ est diagonalisable dans $\mathbb{C}$. L'est-elle dans $\mathbb{R}$ ?
(c) Diagonaliser $M$ dans $\mathbb{C}$.
Si $w \in \mathbb{C}^3$ est un vecteur propre de $M$ pour une valeur propre complexe non réelle, on pose $v_2 = \mathrm{Re}(w)$ et $v_3 = \mathrm{Im}(w)$.
(d) Justifier que $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la matrice de l'endomorphisme associé à $M$ dans la base $\mathcal{B}$.
(e) Interpréter géométriquement le résultat précédent. On fera un dessin dans $\mathbb{R}^3$.

**Exercice 8.** Soit $(u_n)$ la suite de Fibonnacci donnée par

$$u_0 = 0, u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

On considère la suite vectorielle de terme général $w_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$.

(a) Déterminer $w_0$ et une matrice $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = Aw_n$. En déduire une expression de $w_n$ en fonction de $w_0$, $A$ et $n$.
(b) Diagonaliser la matrice $A$. En déduire $A^n$.
(c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$.

**Exercice 9.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_0 = u_1 = u_2 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n.$$

Donner une expression de $u_n$ en fonction de $n$.

**Exercice 10.** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n$. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\varphi \circ \varphi = \varphi$.

(a) Quelles sont les valeurs propres possibles de $\varphi$ ?
(b) Montrer que $\mathrm{Im}(\varphi) \subset \mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{id})$
(c) Montrer que $E = \mathrm{Ker}(\varphi) \oplus \mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{id})$ et écrire la matrice de $\varphi$ dans une base adaptée à cette décomposition en somme directe.
(d) On dit qu'un tel $\varphi$ est la *projection sur* $\mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{id})$ *parallèlement à* $\mathrm{Ker}(\varphi)$. Justifier cette terminologie par une illustration en dimension 2.