RAPPELS : GEOMETRIE DANS LE PLAN ET DANS L'ESPACE,

NOMBRES COMPLEXES, TRIGONOMETRIE, POLYNOMES

□ GEOMETRIE DANS LE PLAN

• Le plan, aussi appelé $\mathbb{R}^2$, est muni d'un **repère orthonormé** direct $\mathcal{R} = \{0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\}$ et du système de coordonnées cartésiennes $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

• Tout point M est représenté par ses **coordonnées** : $M = (x, y)$,

ou par le "**vecteur** position": $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

• La **base** naturelle du plan, $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\}$ est appelée "base canonique". On a $\overrightarrow{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Tout vecteur $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ se décompose donc sur la base $\mathcal{B}$ (ou sur le répère $\mathcal{R}$) en écrivant : $u = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$.

• On peut **additionner** deux vecteur $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, ou **multiplier** un vecteur $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ par un nombre réel λ :

$u + v = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$ et $\lambda u = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$

• Deux vecteurs u et v sont dits **colinéaires** (ou proportionnels) si $\exists \lambda \in \mathbb{R} \mid u = \lambda v$.

• Soient 3 points du plan, A, B et C. On a la relation de **Chasles** : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$.

En particulier, on a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.

Si $A = (x, y)$ et $B = (x', y')$, le vecteur défini par ces deux points est $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x' - x \\ y' - y \end{pmatrix}$

• La **norme** (ou longueur) d'un vecteur $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est $||u|| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

C'est la distance de $M = (x, y)$ à l'origine : $OM = ||\overrightarrow{OM}|| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

• Elle possède trois propriétés :

i) $||u|| = 0 \iff u = 0$

ii) $||\lambda u|| = |\lambda| \, \|u\|$

iii) $||u + v|| \leq \|u\| + \|v\|$

• Un vecteur u est dit **normé** si $||u|| = 1$.

Par exemple, si $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, alors $u = \frac{v}{\|v\|} = \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$ est normé.

• La **distance** entre deux points $M = (x, y)$ et $M' = (x', y')$ vaut $MM' = ||\overrightarrow{MM'}|| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$
.

• La distance permet de définir **cercles** et **disques** :

$C(A, R) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2\}$: cercle de centre $A = (a, b)$ et de rayon R .

$D(A, R) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x - a)^2 + (y - b)^2 \leq R^2\}$: disque de centre $A = (a, b)$ et de rayon R .

$D(O, R) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq R^2\}$: disque de centre $O = (0, 0)$ et de rayon R, très utilisé.

Remarque : $C(O, 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\}$ est le "cercle unité" ou "cercle trigonométrique".

• Les **coordonnées polaires** découlent de manière naturelle de la notion de distance :

Au lieu d'être représenté par ses coordonnées cartésiennes $M = (x, y)$, tout point M du plan sera représenté par ses coordonnées polaires $M = (r, \theta)$.

La variable $r \in [0, +\infty[$ représente toujours la distance de M à l'origine : $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

La variable $\theta \in [0, 2\pi[$ est la valeur de l'angle que fait le vecteur la $\overrightarrow{OM}$ avec l'axe Ox .

On a donc les relations suivantes ***:***

$$\left\{ \begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan\theta = y/x \end{array} \right.$$

• **Le produit scalaire** de deux vecteur $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ est un réel défini par : $u.v = xx' + yy'$.

On a $u.u = x^2 + y^2 = \|u\|^2 = r^2$.

Si on écrit u et v en polaires, $u = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} r'\cos\theta' \\ r'\sin\theta' \end{pmatrix}$, on a :

$u.v = rr'(\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta') = rr'\cos(\theta - \theta')$.

On a donc $u.v = \|u\|\|v\|\cos\alpha$, où α est l'angle formé par les deux vecteurs .

Le produit scalaire peut donc être vu comme une projection.

En particulier, si u et v sont orthogonaux, on a : $u.v = rr'\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$.

• Les droites

Une droite Δ de vecteur normal $n = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et passant par un point $M_0 = (x_0, y_0)$ est l'ensemble des points $M = (x, y)$ tels que $\overrightarrow{M_0M} \,.\, n = 0$.

Elle s'écrit donc ("**équation cartésienne**") : $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by + c = 0\}$

(Ici $c = -\overrightarrow{OM_0} \,.\, n = -(ax_0 + by_0)$. Et $c = 0$ si la droite passe par O.)

Une droite Δ passant par deux points $A = (\alpha, \beta)$ et $B = (\gamma, \delta)$ a pour vecteur directeur $u = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} \gamma - \alpha \\ \delta - \beta \end{pmatrix}$.
Un vecteur normal possible est donc $n = \begin{pmatrix} \delta - \beta \\ -(\gamma - \alpha) \end{pmatrix}$ (vérifiant $n.u = 0$), permettant de trouver l'équation de Δ.

Remarque : si Δ est donnée par une équation de la forme $y = \lambda x + \mu$, elle a pour vecteur directeur $u = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$ et pour vecteur normal $n = \begin{pmatrix} \lambda \\ -1 \end{pmatrix}$.

Il est parfois intéressant d'écrire "l'**équation paramétrique**" de la droite Δ : $\begin{cases} x = \alpha + u_1\lambda \\ y = \beta + u_2\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$.

Elle indique que Δ passe par le point $A = (\alpha, \beta)$ et a pour vecteur directeur $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$.

NB : il faut savoir passer de l'équation paramétrique à l'équation cartésienne, et réciproquement.

□ TRIGONOMETRIE

Il est indispensable de savoir :

- dessiner le cercle trigonométrique (cercle unité) pour y figurer les fonctions sin, cos, et tan

- que cos est **paire 2π-périodique**, sin est **impaire 2π-périodique**, tan est **impaire π-périodique**

- les **valeurs particulières** de ces trois fonctions

- dessiner leur **graphe**

- les domaines de définition de leurs **fonctions réciproques**, arccos , arcsin, et arctan

- retrouver les **relations** :

$\sin(\theta+\pi) = -\sin\theta$, $\cos(\theta+\pi) = -\cos\theta$
$\sin(\pi-\theta) = \sin\theta$, $\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$
$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right) = \cos\theta$, $\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\theta$
$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cos\theta$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sin\theta$
$\tan(\theta+\pi) = \tan\theta$

- la formule de **Pythagore** : $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

- que la **formule d'Euler**, $\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$, permet d'obtenir les **deux expressions fondamentales** :

$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y \quad ; \quad \sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$$

- pour, par suite, retrouver les **relations** :

$\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y$, $\sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y$

$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta$, $\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$

$\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1+\cos(2\theta))$, $\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos(2\theta))$

- et, éventuellement :

$\cos p\cos q = \frac{1}{2}(\cos(p-q)+\cos(p+q))$; $\sin p\sin q = \frac{1}{2}(\cos(p-q)-\cos(p+q))$
$\sin p\cos q = \frac{1}{2}(\sin(p+q)+\sin(p-q))$; $\cos p\sin q = \frac{1}{2}(\sin(p+q)-\sin(p-q))$

□ NOMBRES COMPLEXES

• Un nombre complexe $z = x + iy$ est assimilé au vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ou au point (x, y) par le jeu d'un nombre imaginaire i vérifiant $i^2 = -1$. (On dit que $\{1, i\}$ forme une "base" du "plan complexe".)

Il est important de connaître :

- **le module** de z : $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ qui est la norme (la longueur) de $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

- **le conjugué** de z : $\bar{z} = x - iy$, symétrique de z par rapport à l'axe Ox.

- **l'écriture en polaires** ou **"exponentielle"** :

On part de l'**écriture "algébrique"** $z = x + iy$.

On écrit : $z = |z| \left(\frac{x}{|z|} + i \frac{y}{|z|} \right) = \sqrt{x^2 + y^2} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + i \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) = r(\cos\theta + i \sin\theta) = re^{i\theta}$.

où $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ est le module et θ est "l'argument" de z , vérifiant :
$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $\tan\theta = \frac{y}{x}$.

• **Propriétés**

$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$; $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$; $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$

$|\overline{z}| = |z|$; $z\overline{z} = |z|^2$; $|zz'| = |z||z'|$; $|z + z'| \le |z| + |z'|$

• **Formules d'Euler**

$\cos\theta + i \sin\theta = e^{i\theta}$, $\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$, $\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

($e^{i\theta}$ est un complexe de module 1 - donc sur le cercle unité)

• **Remarque : une écriture utile en électricité.**

Soit un signal s'écrivant $f(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$.

Il peut être utile de l'écrire sous la forme standard : $f(t) = A\cos(\omega t - \varphi)$.

On a :

$$f(t) = \sqrt{a^2+b^2}\left(\tfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos(\omega t) + \tfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin(\omega t)\right)$$

Soit, en prenant φ tel que $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (et $\tan\varphi = \frac{b}{a}$) :

$$f(t) = \sqrt{a^2+b^2}\,(\cos\varphi\cos(\omega t) + \sin\varphi\sin(\omega t)) = A\cos(\omega t - \varphi)$$

C est donc le module du complexe $z = a + ib$ et φ son argument.

□ POLYNOMES

• **Un polynôme de degré** n s'écrit $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, avec $a_0,\, a_1\,, \ldots,\, a_n \in \mathbb{K}$. (On note toujours $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.)

• $r \in \mathbb{K}$ est une **"racine"** de P si $P(r) = 0$. On a alors $P(x) = (x - r)Q(x)$, avec degré(Q)$= n - 1$.
Exemples : $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$; $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$.
Une racine peut être multiple. Par exemple, $P(x) = x^3 - 2x + x = x(x - 1)^2$ admet la racine double $r = 1$.

• **Théorème :** tout polynôme **de degré** n à coefficients dans $\mathbb{K}$ admet exactement n **racines** dans $\mathbb{C}$.

Exemple : $P(x) = x^4 - 1$ a 4 racines dans $\mathbb{C}$.
En effet, $P(x) = x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x - i)(x + i)$.
NB : ces racines sont appelées **racines** $4-$**ièmes de l'unité**.

• **Polynômes de degré** 2 **à coefficents dans** $\mathbb{R}$**.**

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$**,** avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.
On calcule $\Delta = b^2 - 4ac$.

Cas 1 : $\Delta > 0$: il y a **deux** racines **réelles disctintes** $r_1 = \frac{1}{2a}\left(-b + \sqrt{\Delta}\right)$ et $r_2 = \frac{1}{2a}\left(-b - \sqrt{\Delta}\right)$.
Remarque : ce sont les lieux où la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ coupe l'axe $0x$.

Cas 2 : $\Delta = 0$: il y a **une** racine **réelle double** $r_0 = \frac{-b}{2a}$.
Remarque : dans ce cas, $P(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$, et la parabole est tangente à l'axe $0x$.

Cas 3 : $\Delta < 0$: il y a **deux** racines **complexes conjuguées** $r_1 = \frac{1}{2a}\left(-b + i\sqrt{|\Delta|}\right)$ et $r_2 = \frac{1}{2a}\left(-b - i\sqrt{|\Delta|}\right)$.
Remarque : la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ est au-dessus de l'axe $0x$.

• **Remarque 1 :** Si $a, b, c \in \mathbb{C}$, on peut toujours "utiliser" les formules $r_1 = \frac{1}{2a}\left(-b + \sqrt{\Delta}\right)$ et $r_2 = \frac{1}{2a}\left(-b - \sqrt{\Delta}\right)$, mais il faut calculer la racine carrée du nombre complexe $\Delta = b^2 - 4ac$.

• **Remarque 2 :** Trouver l'erreur : Par définition, on a $i^2 = -1$. Donc $i = \sqrt{-1}$.
Ainsi $-1 = i^2 = \sqrt{-1}\,\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1}$=1.

• **Quelques exemples de calcul de racines et de factorisation (dans $\mathbb{C}$).**

• $P(x) = x^2 + x + 1$.

On a $\Delta = -3$ et donc deux racines complexes conjuguées : $x^2 + x + 1 = (x - r_1)(x - r_2) = (x - j)(x - \bar{j})$

$$r_1 = \frac{1}{2}\left(-1 + i\sqrt{3}\right) = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = e^{i\frac{2\pi}{3}} := j$$

$$r_2 = \frac{1}{2}\left(-1 - i\sqrt{3}\right) = \cos\frac{-2\pi}{3} + i\sin\frac{-2\pi}{3} = e^{-i\frac{2\pi}{3}} := \bar{j} = j^2$$

NB : $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$. Ainsi $1, j, \bar{j}$ sont appelées **racines** $3-$**ièmes de l'unité**.

• $P(x) = x^3 + 3x^2 + 7x + 5$

Une racine évidente de P est -1 car $P(-1) = 0$. Ainsi $P(x) = (x - (-1))Q(x) = (x+1)Q(x)$
où Q est un polynôme de degré 2. On trouve $Q(x) = ax^2 + bx + c$ par identification :
i) $x^3 + 3x^2 + 7x + 5 = (x+1)(x^2 + bx + 5)$, les coefficients a et c étant immédiats à trouver.
ii) En développant : $x^3 + 3x^2 + 7x + 5 = x^3 + (b+1)x^2 + (b+5)x + 5$ fournit $b + 1 = 3$ (et $b + 5 = 7$).
D'où $b = 2$ et $Q(x) = x^2 + 2x + 5$.
iii) On calcule alors les deux racines de Q : $r_1 = -1 + 2i$ et $r_2 = -1 - 2i$.
iv) Finalement on a la factorisation : $P(x) = x^3 + 3x^2 + 7x + 5 = (x+1)(x+1-2i)(x+1+2i)$.

• $P(x) = x^4 + 16$.

On peut écrire $P(x) = ((x^2)^2 + 4^2) = (x^2 - 4i)(x^2 + 4i)$.

(On pourrait poser $y = x^2$ et calculer les racines de $y^2 + 16$, mais il est plus direct d'utiliser l'identité remarquable $a^2 + b^2 = (a - ib)(a + ib)$: elle correspond à la formule $|z|^2 = z\,\bar{z}$ pour les nombres complexes.)

Pour terminer la factorisation (dans $\mathbb{C}$), il faut trouver les racines de $4i$ et $-4i$.

On remarque que $z^2 = 4i$ peut être résolue facilement en passant à la forme polaire :
En posant $z = re^{i\theta}$ on a $z^2 = 4i \Longleftrightarrow r^2 e^{i2\theta} = 4e^{i\pi/2 + 2k\pi}$. D'où $r = 2$ et ($\theta = \frac{\pi}{4}$ ou $\theta = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$) - car il ne faut retenir que les arguments dans $[0, 2\pi[$.
Les deux racines de $4i$ sont donc $\alpha_1 = 2e^{i\pi/4} = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}(1+i)$ et $\alpha_2 = 2e^{i5\pi/4} = -\sqrt{2}(1+i) = -\alpha_1$ (ce qui était prévisible !).

On procède de même pour les racines de $-4i$: $\alpha_3 = 2e^{-i\pi/4} = \sqrt{2}(1-i)$ et $\alpha_4 = -\alpha_3 = \sqrt{2}(-1+i)$.

Finalement, on a $x^4 + 16 = (x - \sqrt{2}(1+i))(x + \sqrt{2}(1+i))(x - \sqrt{2}(1-i))(x - \sqrt{2}(-1+i))$.

□ GEOMETRIE DANS L'ESPACE

On va donner les analogies avec la géométrie dans le plan et les notions les plus courantes utiles au calcul.

• L'espace à 3 dimensions, également appelé $\mathbb{R}^3$, est muni d'un **repère orthonormé** direct $\mathcal{R} = \{0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$ et du système de coordonnées cartésiennes $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

• Tout point M est représenté par ses **coordonnées** : $M = (x, y, z)$,

ou par le "**vecteur** position": $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

• La **base** naturelle de l'espace, $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$ est appelée "base canonique".

On a $\overrightarrow{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Tout vecteur $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ se décompose donc sur la base $\mathcal{B}$ (ou sur le répère $\mathcal{R}$) en écrivant :

$u = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$.

• Les règles de calcul sur les vecteurs sont les mêmes que dans le plan (addition, colinéarité, Chasles...).

• La **norme** (ou longueur) d'un vecteur $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est $||u|| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

C'est la distance de $M = (x, y, z)$ à l'origine : $OM = ||\overrightarrow{OM}|| = r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.
(Elle vérifie les trois mêmes propriétés que dans le plan.)

• Un vecteur u est dit **normé** si $||u|| = 1$.

Par exemple, si $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, alors $u = \frac{v}{||v||} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est normé.

• La **distance** entre deux points $M = (x, y, z)$ et $M' = (x', y', z')$ vaut :
$MM' = ||\overrightarrow{MM'}|| = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$.

• La distance permet de définir **sphères** et **boules** :

$S(A, R) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2\}$, sphère de centre $A = (a, b, c)$ et de rayon R .

$B(A, R) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 \leq R^2\}$, boule de centre $A = (a, b, c)$ et de rayon R .

$B(O, R) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$, boule de centre $O = (0, 0, 0)$ et de rayon R, très utilisée.

Remarque : $B(O, 1) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ est la “boule unité”.

On définit les coordonnées cylindriques (analogue des polaires) et sphériques (généralisation des polaires).

• Coordonnées cylindriques.

Tout point $M = (x, y, z)$ sera représenté par ses coordonnées cylindriques $M = (\rho, \theta, z)$.

La variable $\rho \in [0, +\infty[$ représente ici la distance de M à l'axe Oz , ou encore la distance du projeté M' du point M sur le plan xOy à l'origine : $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

La variable $\theta \in [0, 2\pi[$ est la valeur de l'angle que fait le vecteur la $\overrightarrow{OM'}$ avec l'axe Ox .

On a donc les relations suivantes (analogues des polaires) :

$$\left\{\begin{array}{c} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan\theta = y/x \\ z = z \end{array}\right.$$

• Coordonnées sphériques (ou terrestres).

Tout point $M = (x, y, z)$ sera représenté par ses coordonnées sphériques $M = (r, \theta, \varphi)$.

La variable $r \in [0, +\infty[$, comme en 2D, représente la distance de M à l'origine, : $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

La variable $\theta \in [-\pi, \pi[$ est la valeur de l'angle que fait le vecteur la $\overrightarrow{OM}'$, projeté M' du point M sur le plan xOy, avec l'axe Ox. Elle est aussi appelée "longitude".

La variable $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$ est la valeur de l'angle que fait le vecteur la $\overrightarrow{OM}$ avec le plan xOy (de l'équateur). Elle est aussi appelée "latitude".

On a alors les relations (en notant que $x = r'cos\theta$ et $y = r'sin\theta$, avec $r' = OM' = r\cos\varphi$) :

$$\left\{\begin{array}{c} x = r\cos\varphi\cos\theta \\ y = r\cos\varphi sin\theta \\ z = r\sin\varphi \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \tan\theta = y/x \\ \tan\varphi = \sqrt{x^2 + y^2}/z \end{array}\right.$$

• **Le produit scalaire** de deux vecteur $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ est défini par : $u.v = xx' + yy' + zz'$.

On a $u.u = x^2 + y^2 + z^2 = \|u\|^2 = r^2$.

On a toujours $u.v = \|u\| \|v\| \cos\alpha$, où α est l'angle formé par les deux vecteurs (dans le plan de l'espace qui les contient).

Le produit scalaire correspond toujours à une projection.

En particulier, si u et v sont orthogonaux, on a : $u.v = \|u\| \|v\| \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$.

Si on écrit u et v en cylindriques, $u = \begin{pmatrix} \rho\cos\theta \\ \rho\sin\theta \\ z \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} \rho'\cos\theta' \\ \rho'\sin\theta' \\ z' \end{pmatrix}$, on a $u.v = \rho\rho'\cos(\theta - \theta') + zz'$.

Si on écrit u et v en sphériques, $u = \begin{pmatrix} r\cos\varphi\cos\theta \\ r\cos\varphi sin\theta \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} r'\cos\varphi'\cos\theta' \\ r'\cos\varphi' sin\theta' \\ r'\sin\varphi' \end{pmatrix}$, on a :

$u.v = rr'(\cos\varphi\cos\varphi'\cos(\theta - \theta') + \sin\varphi\sin\varphi')$.

• **Les plans de l'espace**

Un plan Π de vecteur normal $n = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et passant par un point $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ est l'ensemble des points $M = (x, y, z)$ tels que $\overrightarrow{M_0M} \,.\, n = 0$.
Son **équation cartésienne** est donc : $\Delta = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz + d = 0\}$
(Ici $d = -\overrightarrow{OM_0} \,.\, n = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$. Et $d = 0$ si le plan passe par O.)

Il est parfois intéressant d'écrire "l'**équation paramétrique**" du plan Π :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \alpha + u_1\lambda + v_1\mu \\ y = \beta + u_2\lambda + v_2\mu \\ z = \gamma + u_3\lambda + v_3\mu \end{array} \right. \quad ; \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Il passe donc par le point $A = (\alpha, \beta, \gamma)$ et a pour vecteurs directeurs $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$.

NB : il faut savoir passer de l'équation paramétrique à l'équation cartésienne, et réciproquement.

Remarque : un plan passant par trois points $A = (\alpha, \beta, \gamma)$, $A' = (\alpha', \beta', \gamma')$ et $A'' = (\alpha'', \beta'', \gamma'')$ a pour vecteurs directeurs $u = \overrightarrow{AA'}$ et $v = \overrightarrow{AA''}$. On obtient donc facilement son équation paramétrique.
Pour trouver son équation cartésienne, un vecteur normal possible est $n = u \wedge v$ (produit vectoriel).

• **Les droites de l'espace**

Une droite Δ de l'espace peut être exprimée par son **équation cartésienne** :
c'est l'intersection de deux plans Π et Π'.

Elle s'écrit alors : $\Delta = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \left\{ \begin{array}{c} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{array} \right. \}$

Son **équation paramétrique** est : $\left\{ \begin{array}{c} x = \alpha + u_1\lambda \\ y = \beta + u_2\lambda \\ z = \gamma + u_3\lambda \end{array} \right. \quad ; \ \lambda \in \mathbb{R}$

Elle passe par donc le point $A = (\alpha, \beta, \gamma)$ et a pour vecteur directeur $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$

NB : ici encore, il faut savoir passer de l'équation paramétrique à l'équation cartésienne, et réciproquement.

Remarque : une droite passant par les points $A = (\alpha, \beta, \gamma)$ et $A' = (\alpha', \beta', \gamma')$ a pour vecteur directeur $u = \overrightarrow{AA'}$. On obtient donc directement son équation paramétrique.

Pour trouver son équation cartésienne, la relation $\lambda = \frac{x-\alpha}{u_1} = \frac{y-\beta}{u_2} = \frac{z-\gamma}{u_3}$ fournit les équations des 2 plans.