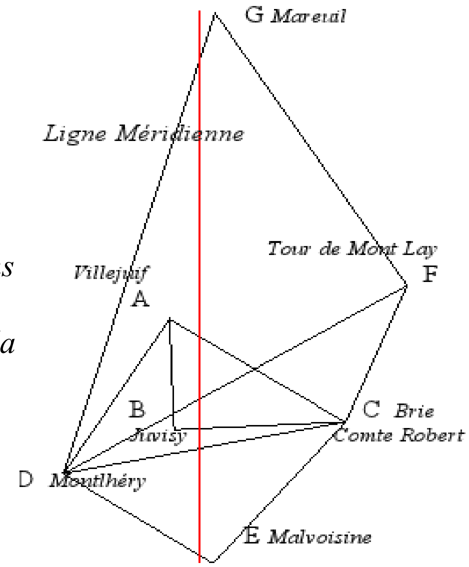
**TD2 : triangulation, projection et géoïde**
GLBE202 Cartographie




### 0) correction de la fin du TD1

### 1) Mesure de distance par triangulation

Vous avez ci-dessous, une copie extraite du rapport de Picard "Mesure de la Terre" (1671).
À partir du texte original répondre aux questions suivantes

- *Vérifier le calcul de AC fait par Picard (il y a 6 pieds dans une toise)*
- *Effectuer le calcul de la distance GE, en sachant que la toise de Paris est égale à 1,949 m.*
- *Quelles erreurs physiques sont possibles ?*

*NB : Théorème de Al-Kashi (Pythagore généralisé) :*

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ \cos\ \gamma.$$

34 *Meſure de la Terre,*

qui ne donnoient les minutes que de ſix en ſix, ils n'ont pas laiſſé d'approcher de la juſteſſe autant qu'il étoit néceſſaire, pour faire voir qu'on ne s'étoit pas trompé aux concluſions.

*I. TRIANGLE* ABC.
*Pour connoitre le côté* AC.

CAB ........ 54°... 4'... 35".
ABC ........ 95 ... 6 ... 55.
ACB ........ 30 ... 48 ... 30.
AB ........ 5663 .. *Toiſes de meſure actuelle.*
*Donc* AC ...... 11012 .. *Toiſes 5 pieds.*
*Et* BC ....... 8954 ... *Toiſes.*

*II. TRIANGLE* ADC.
*Pour* DC *&* AD.

DAC ........ 77°... 25'.. 50".
ADC ........ 55 ...... 0 ... 10.
ACD ........ 47 ... 34 ..... 0.
AC ..... 11012 .. *Toiſes 5 pieds.*
*Donc* DC ..... 13121 .. *Toiſes 3 pieds.*
*Et* AD ....... 9922 .. *Toiſes 2 pieds.*

*III. TRIANGLE* DEC.
*Pour* DE *&* CE.

DEC ........ 74°... 9'.. 30".
DCE ........ 40 ... 34 ..... 0.
CDE ........ 65 ... 16 ... 30.
DC ..... 13121 ... *Toiſes 3 pieds.*
*Donc* DE ....... 8870 ... *Toiſes 3 pieds.*
*Et* CE .... 12389 ... *Toiſes 3 pieds.*

*par M. l'Abbé Picard.* 35

*IV. TRIANGLE* DCF.
*Pour* DF.

DCF ........ 113°... 47'... 40".
DFC ........ 33 ... 40 ..... 0.
FDC ........ 32 ... 32 ... 20.
DC ...... 13121 ... *Toiſes 3 pieds.*
*Donc* DF ....... 21658 ... *Toiſes.*

Notez que dans ce quatriéme triangle, l'angle DFC a été augmenté de 10", qui manquoient à la ſomme des trois angles.

*V. TRIANGLE* DFG.
*Pour* DG *&* FG.

DFG ........ 92°... 5'... 20".
DGF ........ 57 ... 34 ..... 0.
GDF ........ 30 ... 20 ... 40.
DF ...... 21658 ... *Toiſes.*
*Donc* DG ...... 25643 ... *Toiſes.*
*Et* FG ....... 12963 ... *Toiſes 3 pieds.*

Enſuite de ces cinq triangles, il a été facile de conclure la diſtance GE entre Malvoiſine & Mareuil, ſans ſuppoſer aucune nouvelle Obſervation.

**2) Protocole de mesure et sensibilité aux erreurs.**

On veut mesurer la largeur du Rhône. On choisit deux points (A et B) séparés de 10m sur une rive et une cible sur l'autre rive (C). Les deux angles mesurés en A et B valent 89° et 85°.

- *Faites un schéma et calculer la largeur du Rhône AC.*

Imaginons que je fasse une erreur de 1° sur la mesure de l'angle B.

- *Quelle erreur sur la distance AC en découle ?*

Si maintenant, je fais la même mesure avec une distance de 60m entre mes points A et B et des angles A et B de 89° et 58.5°.

- *Compléter le schéma et vérifier que la distance AC est constante au mètre près.*
- *De combien change la distance AC si je refais une erreur de 1° sur la mesure de l'angle B ?*

Généralisation :

- *Quelle est la conséquence d'une erreur de mesure d'angle d'un degré si la distance entre les deux points est petite par rapport à la distance à la cible ?*
- *Que va impliquer une erreur de la mesure d'une distance pour le calcul des distances suivantes ?Et comment varie l'erreur avec le nombre de triangles nécessaires pour calculer une distance ?*

**3) Positionnement par trilatération en 2D**

- *Faire un dessin dans le plan de la trilatération. Est-ce un positionnement relatif ou absolu ?*
- *Que se passe t-il si les centres des trois cercles sont proches ? De quoi dépend l'erreur sur la position du point recherché ?*
- *Comment varie l'erreur en fonction du nombre de mesures ?*

**4) calcul de l'aplatissement de la terre**

Vous allez refaire (une partie) du calcul de l'aplatissement de la terre fait par Newton. Supposons que la terre est entièrement composée d'un fluide de densité homogène, qu'elle est ronde (R=6371 km) et que la durée de rotation est égale à 24 heures. Dans ce cas, l'aplatissement de terre due à la rotation est proportionnelle (en première approximation) aux valeurs de la pesanteur au pôle et à l'équateur.

*Calculer alors l'aplatissement f=(a-b)/a avec a et b le rayon au pôle et à l'équateur.*

NB : on prend 9,81 $m/s^2$ comme valeur pour la gravité due à la terre ronde.

Cédric Champollion, GLBE202, 2012

**Correction**

## 1) Trinagulation

### CORRIGE

1) En utilisant la formule des sinus, on a :

$$\frac{AC}{\sin \hat{B}} = \frac{AB}{\sin \hat{C}}$$

d'où $AC = AB \dfrac{\sin \hat{B}}{\sin \hat{C}} = 5663 \dfrac{\sin 95°6'55''}{\sin 30°48'30''}$.

Ainsi **AC ≈ 11 012,89 toises**. On retrouve donc bien les 11 012 toises 5 pieds obtenus par Picard.

2) Pour le calcul de GE, on utilise la formule du cosinus (Théorème d'Al Kashi) dans le triangle GED :

$GE^2 = DG^2 + DE^2 - 2\ DG \times DE \times \cos E\hat{D}G$.

D'après le document de Picard,
DG = 25 643 toises,
DE = 8 870,5 toises,

$E\hat{D}G = E\hat{D}C + C\hat{D}F + F\hat{D}G$
$= 65°16'30''+32°32'20''+30°20'40''$
$= 128°9'30''$.

On en déduit que :

$GE^2 =$
$25643^2 + 8870{,}5^2 - 2 \times 25643 \times 8870{,}5 \times \cos(128°9'30'')$

D'où GE ≈ 31 895,5 toises c'est à dire **31 895 toises et 3 pieds**.

Ils ne connaissent pas(?) le théorème de Al-Kashi dans le triangle suivant :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ \cos\ \gamma.$$

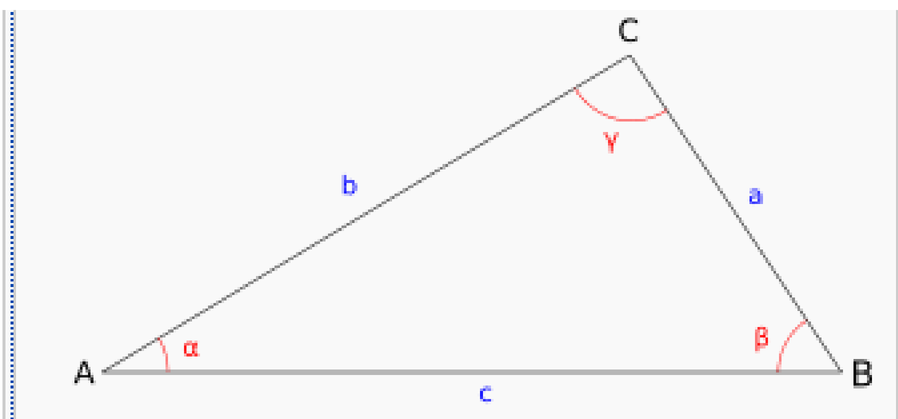
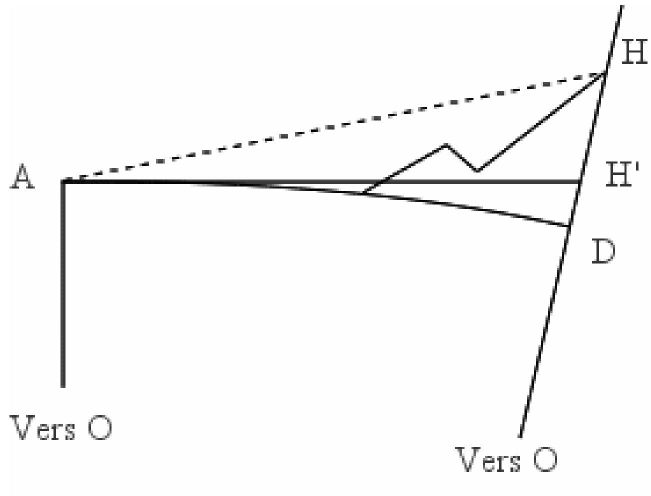



Fig. 1 - Notations usuelles dans un triangle quelconque.

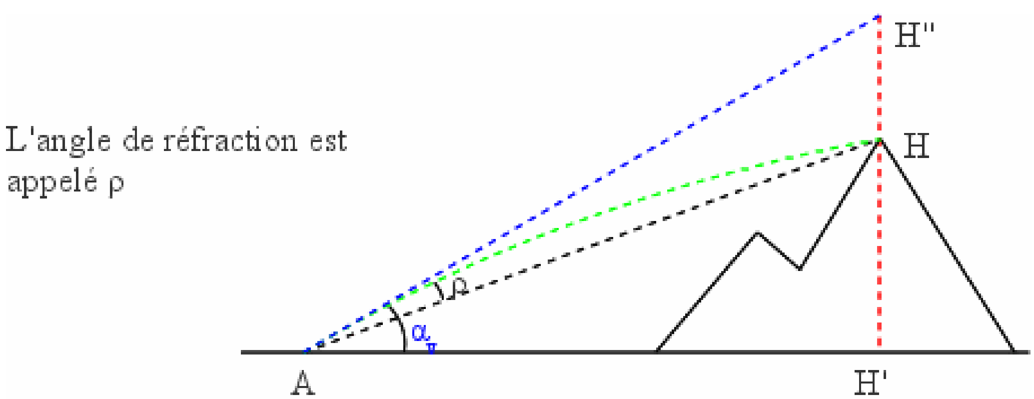
- Pour les erreurs physiques, ce sont le problème de la réfraction de la lumière (fct de la température et de l'humidité) et que la terre est ronde alors que les mesures sont des lignes droites.

Figure 4. L'effet de la sphéricité de la Terre




O designe le centre de la Terre, supposée sphérique.

Figure 5. L'effet de la réfraction atmosphérique




**2) Protocole de mesure et sensibilité aux erreurs.**

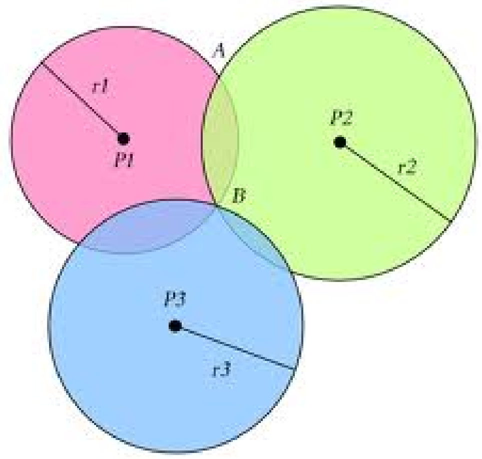
| angle A | Angle B | Dist AB | Dist AC |
|---|---|---|---|
| 89 | 85 | 10 | 95,30367777 |
| 89 | 86 | 10 | 114,4576386 |
| 89 | 58,5 | 60 | 95,21393477 |
| 89 | 59,5 | 60 | 98,94333328 |

**-Généralisation :**

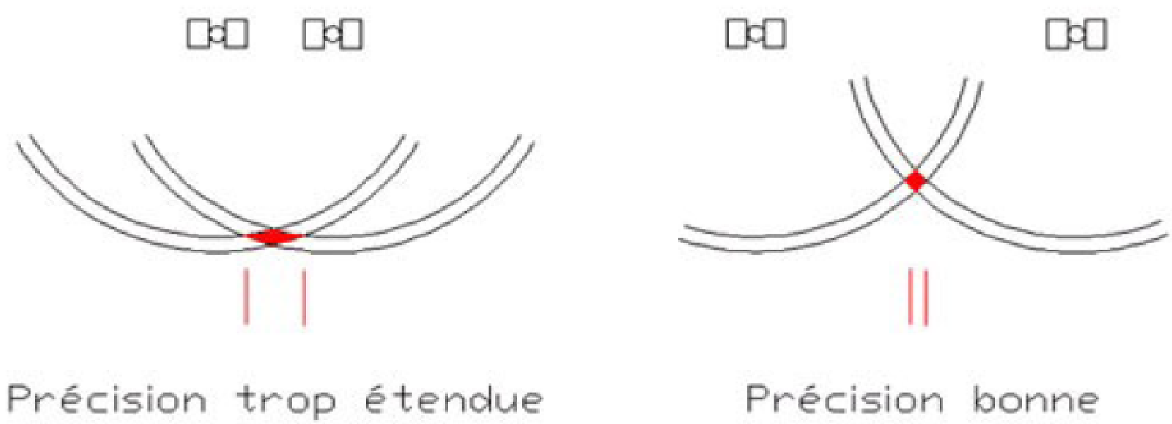
- Si la distance entre les deux points de base est trop petite, l'erreur sur un angle implique une très forte erreur sur la distance.
- Les erreurs en triangulation se propagent et s'ajoutent pour chaque triangle. Donc l'erreur augmente avec le nombre de triangle (en racine de fois le nombre de triangle) → les erreurs sont corrélées (de type mouvement brownien ou marche aléatoire).

**3) Trilatération :**

A l'inverse, en trilatération, les erreurs sont indépendantes donc plus on a de mesures, plus l'erreur diminue (en racine de fois le nombre de mesures : bruit gaussien ou blanc).




Trilatération avec une bonne géométrie et sans erreur.




Trilatération avec une mauvaise géométrie et une erreur.

**4) Aplatissement de la terre**

On peut supposer qu'une terre fluide en équilibre hydrostatique sans rotation que la charge est égale (Fg*Rt) avec la force de gravité et Rt le rayon moyen terrestre. La terre serait ronde sans rotation.
Avec la rotation il faut rajouter la force centrifuge ($Fc=w^2.Re$ avec w la rotation de la terre en radian/seconde et Re le rayon à l'équateur ; la force centrifuge est nulle au pôle. On a donc l'équilibre suivant :
$Fg.Rp = (Fg+Fc).Re \Leftrightarrow Fg(Rp-Re)=FcRe \Leftrightarrow (Rp-Re)/Re=Fc/Fg$
Avec Rp = rayon au pôle. On simplifie les choses en prenant Fg et Rt constant alors qu'il varie entre 9,78 à l'équateur et 9,83 au pôle soit une erreur de ~5 pour 1000 et entre 6356 et 6378 (erreur de 3 pour mille). Ca n'explique pas complètement l'erreur de l'aplatissement que l'on obtient à mon avis. Je ne connais pas les raisons fondamentales de l'erreur que l'on obtient (entre autre on suppose ici une densité

homogène avec la profondeur). Mais le raisonnement reste simple et l'on peut discuter des erreurs et ordres de grandeur avec les étudiants.
Comme la définition de l'aplatissement est f=(a-b)/a (à donner aux étudiants), on trouve :
$(2*PI/(24*60*60))^2 \;/\; (9.81/6371) = 1/291$
A comparer avec l’aplatissement de l'ellipsoïde de WGS84 : 1/298 !