

GLBE202 : cartographie
TD1 : Rappels de calculs fondamentaux en cartographie

Notions de maths :

- Angles internes/externes et droites parallèles
- Proportionnalité
- Longueur d'un arc de cercle

Exo1. La terre ronde : mesure du rayon de la terre par Ératosthène

Deux siècles avant J.-C., Ératosthène a remarqué que lors du solstice d'été les rayons du soleil touchaient le fond d'un puits à Syène à midi exactement. Au même moment, à Alexandrie, l'obélisque projetait une ombre. Il en déduisit le rayon de la terre avec une grande précision.

- *Représenter schématiquement l'observation d'Ératosthène. Indiquer sur le schéma les grandeurs nécessaires pour en déduire le rayon de la Terre.*
- *Quelles sont les approximations faites par Ératosthène ? Quelles sont les mesures nécessaires pour faire le calcul du rayon de la Terre et comment les réaliser à l'époque ?*
- *Calculer le rayon et la circonférence de la terre sachant que la distance Syène - Alexandrie est de 5000 « stades », que l'angle entre la verticale et les rayons du soleil est de 7° ?*
- *Syène et Alexandrie se situent sur un axe Nord-Sud quasiment parfaitement. Si Eratosthène avait mesuré une distance sur un axe Est-Ouest, aurait-il pu en déduire le rayon de la terre ?*
- *NB : un stade égyptien vaut 157m.*

Exo2. Terre plate, terre sphérique et terre ellipsoïdale : Mesure de distance

Pour organiser ma croisière en voilier, je dois calculer la distance entre Majorque et New-York. J'ai repéré sur le globe les coordonnées géographiques (WGS84) du départ et de l'arrivée :

Majorque : N $40^\circ 42' 51.6''$ E $2^\circ 20' 20.333''$

New-York : N $40^\circ 42' 51.6''$ W $74^\circ 0' 21.492''$

a) *Question préliminaire : comment calculer la longueur d'un arc de cercle dont je connais l'angle au centre ?*

N'ayant pas internet pour calculer la vraie distance, je décide de faire calculer des distances approximatives :

- La distance en ligne droite en traversant la terre (par un tunnel).
- La formule de mon grand-père : $1^\circ = 111$ km
- La distance en suivant le même azimut plein Ouest.

b) *calculer ces trois distances et commenter les résultats. D'où provient la formule de mon grand-père ? Quand est-ce que cette formule est pertinente ?*

La distance le long d'un grand cercle est de 6211 km pour une terre sphérique avec un rayon moyen 6371 km et de 6227 km pour l'ellipsoïde WGS84.

c) *Représenter toutes ces distances sur un ou deux schémas.*

Exo3. L'aplatissement de la terre, son volume, sa densité. Introduction du prochain cours.

Selon la définition, l'ellipsoïde WGS84 est défini par les valeurs suivantes :

Demi grand axe (WGS84) $a = 6\,378\,137,0$ m

Aplatissement (WGS84) $f = 1/298,257\,223\,563$

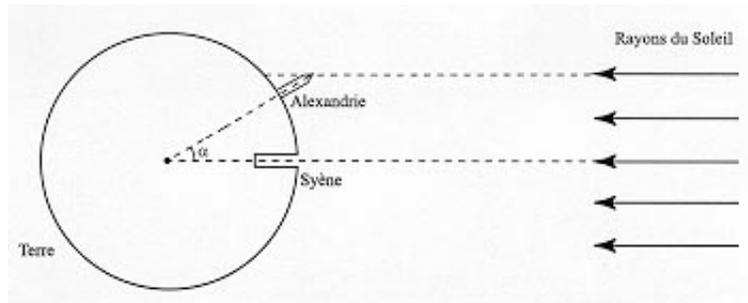
- a) représenter ces valeurs sur un schéma.
- b) calculer le rayon de la terre à l'équateur et au pôle.
- c) Question piège : quel est le rapport entre les variations du rayon terrestre et l'altitude ?
- d) En supposant que la Terre est un ellipsoïde de révolution, calculez sa masse et sa masse volumique et sa densité moyenne sachant que g à la surface vaut $g=9.81\text{ms}^{-2}$. Le volume d'un ellipsoïde de révolution est $\frac{4}{3}\pi abc$ avec a, b, c les trois demi-axes. Qu'en pensez-vous ?

Cédric Champollion, 03/2013

« Correction »

J'ai pas mal changé ce TD. Je ne sais pas combien de temps ça va prendre. Si c'est trop rapide, ce n'est pas grave. Les deux premiers exo sont « importants », le dernier moins. Laisser leur le temps de calculer et de réfléchir et surtout de dessiner.

Exo1 : Rayon de la terre



- Hypothèses : la terre est ronde / les rayons du soleil sont parallèle / Syène et Alexandrie sont sur le même méridien / puits et obélisque verticaux
- Calcul $7^\circ = 5000$ stades donc $360^\circ \sim 257000$ stades = 40371km pour la circonférence de la terre et 6425 pour le rayon.
- Petite histoire : Ératosthène a mesuré la distance en comptant pendant deux jours le nombre de pas de chameau puis en mesurant le pas « moyen » de chameau :-)

Exo2 : distance sur une sphère

a) *Question préliminaire : comment calculer la longueur d'un arc de cercle dont je connais l'angle au centre ?*

Si l'angle au centre est α (en radians) et R le rayon, la longueur de l'arc est $\alpha * R$

b) *calculer ces trois distances et commenter les résultats. D'où provient la formule de mon grand-père ? Quand est-ce que cette formule est pertinente ?*

→ formule de grand-père : **8488km** $1^\circ = 111\text{km}$ est le calcul pour une terre sphérique de $2 * \text{PI} * R / 360$. Ca marche à peu près avec les latitudes, pas du tout avec les longitudes. Ca revient pour les longitudes à prendre une projection de Mercator globale (projection sur un cylindre). On parle des projections dans le prochain cours mais vous pouvez en parler un peu. C'est un bon ordre de grandeur à retenir avec pas mal de limitations.

→ distance à azimuth constant : c'est un petit cercle (vu en cours). Il faut calculer le rayon de ce petit cercle ($\cos(\text{latitude}) * R$) puis calculer la longueur de l'arc avec ce rayon. C'est faisable facilement parce que l'on a la même latitude.

→ tunnel en ligne droite : 5968 km. Dans triangle rectangle en le centre de la terre, le milieu du tunnel et un des points (NY ou majorque), on calcule le sinus de la moitié de l'angle au centre :

$d = 2 * r * \sin(\text{angle}/2)$. Avec r le rayon du petit cercle $r = \cos(\text{latitude}) * R$

Exo 3 : ellipsoïde, masse, volume

Tout est simple. L'idée est d'avoir des ordres de grandeur de aplatissement et de préparer la partie sur le géoïde (influence des masses sur l'altitude). Le rayon de la terre n'a rien à voir avec l'altitude. Je n'ai pas fait le calcul de la densité moyenne. L'idée est de fixer un ordre de grandeur encore une fois : 2.67 pour la croûte sup par exemple. Vous pouvez aussi expliquer la différence entre la densité et la masse volumique. **J'ai oublié de donner $G = 6.67 * 10^{-11}$.**