Devoir encadré - 26 avril 2024

Durée : 2 heures

Exercice 1 : TAF

1. Soit $h : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ la fonction dfinie par $h(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$. Peut-on appliquer le théorème des accroissements finis à h ?
2. Un automobiliste entre sur une autoroute où la vitesse est limitée à $130\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$. Quand il en sort, deux heures plus tard, à 305 km de son point d'entrée, les gendarmes lui dressent un PV pour excès de vitesse, bien que sa vitesse n'ait jamais été matériellement contrôlée. Les gendarmes ont-il raison ?

Proposition de correction :

1. La fonction h est continue sur $[-1, 1]$ et $h'(x) = -\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ si $x \neq 0$ mais $h'(0)$ n'existe pas car
$$\lim_{x \to 0} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \mp\infty.$$
On ne peut donc pas appliquer le TAF.
2. Soit $s(t)$ la position de la voiture (mesurée en kilomètres) au temps t (mesuré en heures). On a $s(0) = 0$ et $s(2) = 305$. Si la position est une fonction dérivable du temps, alors le TAF permet de conclure qu'il existe un instant τ avec $0 < \tau < 2$ pour lequel $s'(\tau) = \dfrac{s(2) - s(0)}{2 - 0} = 152,5$. En d'autres termes, la voiture a eu, à un instant donné, une vitesse de $152,5\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$.

Exercice 2 : Intégrales

1. Calculer l'aire comprise entre le graphe de la foncton $f(x) = -x^2 + x + 2$ et de la fonction $g(x) = x^2 - 3x + 2$ sur l'intervalle où le graphe de f est au-dessus de celui de g.
2. Une voiture roule à une vitesse de $v(t) = Vt(1-t)\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$, avec $V > 0$ une constante, sur l'intervalle de temps $0 \leq t \leq 1\text{h}$. Quelle est sa vitesse maximale ? Quelle distance a-t-elle parcourue ?

Proposition de correction :

1. Comme $f(x) = g(x)$ si et seulement si $x \in \{0, 2\}$ et que $f(x) \geq g(x)$ pour $x \in [0, 2]$, l'aire est $\int_0^2 (f(x) - g(x))\text{d}x = 8/3$.
2. L'accélération est $v'(t) = 1 - 2t$ qui s'annule en $t = 1/2$. La vitesse maximale est donc $v(1/2) = V/4$. La distance parcourue est $x(1) - x(0) = \int_0^1 x'(t)\text{d}t = \int_0^1 v(t)\text{d}t = V/6$.

Exercice 3 : Somme de Riemann et méthode des rectangles
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. On définit une subdivision de $[a, b]$ uniforme :

$$a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b,$$

avec $a_i = a + i\dfrac{b-a}{n}$, $n \geq 1$.
Soit $c(x)$ la fonction en escalier définie par

$$c(x) = \begin{cases} f(a_k), & \text{si } x \in [a_k, a_{k+1}], \\ f(b), & \text{si } x = b. \end{cases}$$

1. Calculer $\Sigma(f) = \int_a^b c(x)\mathrm{d}x$.
2. Montrer que
$$\left| \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \Sigma(f) \right| \leq \frac{(b-a)^2}{2n} \sup_{x \in [a,b]} |f'(x)|.$$
Indication : on pourra utiliser le TAF pour évaluer $f(x) - f(a_k)$.
3. En déduire que
$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$
4. Application au calcul de limites.
   (a) Montrer que
   $$\sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2 + i/n}.$$
   (b) Déduire des questions précédentes la limite
   $$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{n+k}.$$

Proposition de correction :

1. $\Sigma(f) = \sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1} - a_k)f(a_k)$.
2. Puisque f est de classe $\mathcal{C}^1$ on peut utiliser le théorème des accroissements finis sur $[a_k, a_{k+1}]$:
$$f(t) - f(a_k) = (t - a_k)f'(\eta_k),\ \eta \in]t, a_{k+1}[. \tag{1}$$

Puis on regarde :

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(t)dt - \Sigma(f)\right| &= \left|\int_a^b f(t)dt - \sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)f(a_k)\right| \\
&= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)\mathrm{d}t - (a_{k+1}-a_k)f(a_k)\right)\right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} |f(t)-f(a_k)|\mathrm{d}t \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} |f'(\eta_k)(t-a_k)|\mathrm{d}t \\
&\leq \sup_{t\in[a,b]}|f'(t)|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} |t-a_k|\mathrm{d}t \\
&\leq \sup_{t\in[a,b]}|f'(t)|\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(a_{k+1}-a_k)^2}{2} \\
&\leq \sup_{t\in[a,b]}|f'(t)|\frac{(b-a)^2}{2n}.
\end{aligned}$$

3. On a $\Sigma(f) = \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)(a_{k+1}-a_k)$. Or $a_{k+1}-a_k = \dfrac{b-a}{n}$ et $a_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$. On peut donc écrire
$$\Sigma(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right).$$
Il suffit ensuite de faire tendre n vers l'infini dans l'inégalité pour en déduire la limite souhaitée.

4. Application.
   (a) Il faut faire un changement d'indice et poser $i = k - n$.
   (b) On applique la formule avec $a = 0$, $b = 1$ et $f(x) = 1/(2+x)$. On en déduit que
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{n+k} = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \ln(3/2).$$

Exercice 4 : Formule et inégalité de Taylor-Lagrange

1. Démontrons par récurrence la formule de Taylor-Lagrange ave reste intégral : soient I un intervalle réel, $f \in C^n(I)$, $n \geq 1$, et $a, x \in I$. Alors
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a) + \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1}f^{(n)}(t)\mathrm{d}t.$$
   (a) Justifier que la relation est vraie pour $n = 1$.

(b) Supposons l'identité vraie au rang n. Montrer que

$$\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}\mathrm{d}t = f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} + \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}\mathrm{d}t.$$

(c) En déduire la relation au rang $n+1$.

2. Inégalité de Taylor : soit $J \subset I$ un intervalle fermé borné. On note

$$M = \sup_{t\in J} |f^{(n)}(t)| \in \mathbb{R}^+.$$

Montrer que, pour $a, x \in J$, on a

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq \frac{M}{n!}|x-a|^n.$$

3. Application : soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞. On suppose qu'il existe une fonction polynomiale p, de degré impair, telle que pour tout $n \geq 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|f^{(n)}(x)| \leq |p(x)|.$$

(a) Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f^{(n)}(a) = 0$ pour tout $n \geq 0$.

(b) En déduire que f est identiquement nulle.

(c) Le résultat est-il encore vrai pour p de degré pair ?

Proposition de correction :

1. Taylor-Lagrange avec reste intégral.

(a) Pour $n = 1$, c'est le théorème fondamental de l'analyse : pour $f \in C^1(I)$, on a

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\mathrm{d}x.$$

(b) Soit f de classe $n+1$. On note $R_n(x) = \dfrac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)\mathrm{d}t$. Une IPP donne

$$\begin{aligned}
R_n(t) &= \left[-f^{(n)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\right]_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t \\
&= f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

(c) Comme f de classe $n+1$, on a en particulier $f \in C^n(I)$. On applique l'hypothèse de récurrence (au rang n) :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + R_n(x).$$

En utilisant la question précédente, on en déduit que

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + R_{n+1}(x).
\end{aligned}$$

2. Avec les notations précédentes, on a

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) = R_n(x).$$

En utilisant l'expression du reste, on a

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n-1)!} \left| \int_a^x |x-t|^{n-1} \mathrm{d}t \right|,$$

qui donne le résultat voulu.

3. Application.

   (a) Puisque le degré de p est impair, p admet une racine notée a. Puisque $p(a) = 0$, on a bien $f^{(n)}(a) = 0$.

   (b) Soit x réel. On applique l'inégalité de Taylor entre a et x à l'ordre $n-1$. En notant $I = [a, x]$ ou $I = [x, a]$, on obtient

   $$|f(x)| \leq \frac{|x-a|^n}{n!} \sup_{t \in I} |f^{(n)}(x)| \leq M \frac{|x-a|^n}{n!},$$

   où $M = \sup_{t \in I} |p(t)|$. Notons que M est indépendante de n. En faisant tendre n vers $+\infty$, on en déduit que $|f(x)| \to 0$ pour tout x et par suite que f est identiquement nulle.

   (c) Le résultat n'est plus vrai si p est de degré pair. Il faut trouver un contre-exemple : le polynôme constant égal à 1 et $f(x) = \sin(x)$ conviennent.