Université de Montpellier & Polytech — L1 PEIP
HA8201H Mathématiques

Devoir encadré - 22 mars 2024

Durée : 2 heures

Exercice 1 : Déterminants
Les propriétés suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. $A \in M_n(\mathbb{K})$, $A = 0 \Rightarrow \det(A) = 0$.
2. Pour $n \geq 2$, $A \in M_n(\mathbb{K})$, $\det(A) = 0 \Rightarrow A = 0$.
3. Pour $n \geq 2$, $(A, B) \in M_n(\mathbb{K}) \times M_n(\mathbb{K})$, $\det(A) = \det(B) \Rightarrow A = B$.
4. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit f un endomorphisme de E tel que $f^3 = Id_E$. Alors $\det(f) = 1$.
5. On considère deux matrices à coefficients réels
$$A = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & k \end{pmatrix}, \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 2d & g-a & 3g \\ 2e & h-b & 3h \\ 2f & k-c & 3k \end{pmatrix}.$$
On pose $\det(A) = \alpha$. Alors $\det(B) = -6\alpha$.

Proposition de correction :

1. Vraie.
2. Fausse.
3. Fausse.
4. Vraie.
5. Fausse. On trouve $\det(B) = 6\alpha$. En effet
$$\det(B) = 2 \times 3 \begin{vmatrix} d & g-a & g \\ e & h-b & h \\ f & k-c & k \end{vmatrix}.$$
Puis en retranchant la troisième colonne à la deuxième, le déterminant reste inchangé, d'où
$$\det(B) = 2 \times 3 \begin{vmatrix} d & -a & g \\ e & -b & h \\ f & -c & k \end{vmatrix}.$$
Pour conclure, il suffit de mettre -1 en facteur et d'échanger la première et la deuxième colonne pour faire apparaître le déterminant de A.

Exercice 2 : Coordonnées de vecteur

1. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 et soit (i, j) une base de E. On définit deux vecteurs u et v qui ont pour coordonnées dans la base (i, j) $u = (\lambda, 1)$ et $v = (-3, \lambda + 4)$, λ étant un paramètre réel. Définir les valeurs de λ pour lesquelles la famille (u, v) est libre ou liée.
2. On appelle U et V les vecteurs u et v précédents correspondant à $\lambda = -2$. Montrer que (U, V) est une base de E.
3. Soit W un vecteur de E de coordonnées (x, y) dans la base (i, j) et de coordonnées (X, Y) dans la base (U, V). Déterminer x et y en fonction de X et Y.

Proposition de correction :

1. Dans la base (i, j), le déterminant (noté d) associé à la famille (u, v) est
$$d = \begin{vmatrix} \lambda & -3 \\ 1 & \lambda + 4 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda + 4) + 3 = \lambda^2 + 4\lambda + 3 = (\lambda + 1)(\lambda + 3).$$
Si $\lambda = -1$ ou si $\lambda = -3$ la famille est liée car le déterminant est nul. Sinon le déterminant est non nul et la famille est libre.
2. Pour $\lambda = -2$, le déterminant est non nul, la famille (U, V) est alors maximale libre. Elle forme donc une base de E.
3. Comme $\lambda = -2$, on a $U = -2i + j$ et $V = -3i + 2j$. Le vecteur W s'exprimera dans les deux bases selon :
$$\begin{aligned} W &= xi + yj \\ &= XU + YV \\ &= X(-2i + j) + Y(-3i + 2j) \\ &= (-2X - 3Y)i + (X + 2Y)j. \end{aligned}$$
Les coordonnées de W dans la base (i, j) étant uniques, on en déduit que
$$\begin{cases} x &= -2X - 3Y, \\ y &= X + 2Y. \end{cases}$$

Exercice 3 : Changement de base

On considère l'espace $\mathbb{R}^2$ muni de la base canonique notée $B = (e_1, e_2)$. Soit f l'application linéaire donnée par
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (u, v) &\mapsto (2u, -v), \end{aligned}$$
dans la base B.

1. Déterminer la matrice de A représentative de f dans la base B.
2. Montrer que les vecteurs $e'_1 = (3, 1)$ et $e'_2 = (5, 2)$ forment une base de $\mathbb{R}^2$ que l'on notera B'.
3. Calculer les matrices de passage $P_{B' \to B}$ et $P_{B \to B'}$ entre les bases B et B'.
4. Déterminer la matrice A' représentative de f dans la base B' en utilisant la formule de changement de base.
5. Écrire les coordonnées de $f(e'_1)$ et $f(e'_2)$ dans les bases B et B'.
6. Calculer les matrices de f^5 dans les deux bases.

Proposition de correction :

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
2. Les deux vecteurs sont linéairement indépendants. Ils forment une famille maximale libre de $\mathbb{R}^2$, et donc une base de $\mathbb{R}^2$.
3. $P_{B \to B'} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, et $P_{B' \to B} = (P_{B \to B'})^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.
4. $A' = P_{B' \to B} A P_{B \to B'} = \begin{pmatrix} 17 & 30 \\ -9 & -16 \end{pmatrix}$.
5. $f(e'_1) = 6e_1 - e_2 = 17e'_1 - 9e'_2$ et $f(e'_2) = 10e_1 - 2e_2 = 30e'_1 - 16e'_2$.
6. f^5 a pour matrice $A^5 = \begin{pmatrix} 32 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ dans la base B et $(A')^5 = \begin{pmatrix} 197 & 330 \\ -99 & -166 \end{pmatrix}$ dans la base B'.

Exercice 4 : Théorème de Rolle

1. Illustrer graphiquement les résultats du théorème des valeurs intermédiaires et du théorème de Rolle.
2. Soient a, b et c trois réels. Montrer qu'il existe $x \in]0, 1[$ tel que
$$4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a + b + c.$$
On pourra étudier la fonction
$$\begin{aligned} \varphi : [0, 1] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto ax^4 + bx^3 + cx^2 - (a + b + c)x. \end{aligned}$$
3. Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = f(0).$$
Montrer qu'il existe $c > 0$ telle que $f'(c) = 0$.

Proposition de correction :

1. Voir les illustrations vues en cours (S1 et S2).
2. La fonction polynomiale φ est dérivable et vérifie $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(1) = 0$, il suffit d'appliquer le théorème de Rolle pour conclure.
3. Si f est constante, la propriété est immédiate. Sinon, il existe un point $x_0 \in]0, +\infty[$ tel que $f(x_0) \neq f(0)$. Posons $y = \frac{1}{2}(f(x_0) + f(0))$ qui est une valeur intermédiaire à $f(0)$ et $f(x_0)$. Par le TVI, il existe $a \in]0, x_0[$ tel que $f(a) = y$. Puisque $\lim_{x \to +\infty} f(x) = f(0)$, y est une valeur intermédiaire à $f(x_0)$ et à une valeur $f(x_1)$ avec x_1 suffisamment grand. Par le TVI, il existe $b \in]x_0, x_1]$ tel que $f(b) = y$. En appliquant le théorème de Rolle sur $[a, b]$, on peut conclure.