Devoir encadré - 21 avril 2023

Durée : 2 heures - Documents autorisés

Exercice 1 : Intégration
Soient f et g deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ telles que, pour tout $x \in [0,1]$, on a $f(x) = \int_0^x g(t)\mathrm{d}t$ et $g(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$. On pose $u = f - g$.

1. Démontrer que $u' = -u$ et que $u(0) = 0$.
2. En déduire que $f = g = 0$.

Correction :

1. Par linéarité de l'intégrale, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$u(x) = \int_0^x (g(t) - f(t))\mathrm{d}t = \int_0^x u(t)\mathrm{d}t.$$
On en déduit que $u(0) = 0$ et, par le théorème fondamental, que u est de classe C^1 avec, pour tout $x > 0$, $u'(x) = -u(x)$.
2. Ainsi, on sait qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ de sorte que $u(x) = \lambda e^{-x}$. La condition $u(0) = 0$ garantit que $u = 0$ et donc que $f = g$. Mais alors, on a $f(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$. On peut appliquer un raisonnement similaire à f : f est de classe C^1, on a $f'(x) = f(x)$ pour tout x réel. Donc il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \mu e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Puisque $f(0) = 0$ on a $f = 0$.

Exercice 2 : Sommes de Riemann
Calculer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k^2}$,
2. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{2n} \frac{k}{k^2+n^2}$.

Correction :

1. On a
$$\begin{aligned} n\sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k^2} &= n\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{(i+n)^2} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\left(1+\frac{i}{n}\right)^2}. \end{aligned}$$

Comme $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1/(1+x)^2$ est continue, on a

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\left(1+\frac{i}{n}\right)^2} &= \int_0^1 1/(1+x)^2 \mathrm{d}x \\ &= [-1/(1+x)]_0^1 = -1/2+1 = 1/2.\end{aligned}$$

2. On a

$$\sum_{k=0}^{2n} \frac{k}{k^2+n^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{2n} \frac{k/n}{(k/n)^2+1}.$$

Comme $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x/(x^2+1)$ est continue, on a

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{2n} \frac{k}{k^2+n^2} &= \int_0^2 x/(x^2+1) \mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]_0^2 = \ln(5)/2.\end{aligned}$$

Exercice 3 : Formule de Taylor et valeurs approchées

Soit x un réel strictement positif.

1. Calculer la dérivée troisième de $f(x) = \ln(1+x)$ et donner une majoration de $|f'''(t)|$ pour tout $t \in [0,x]$.
2. En déduire que
$$\left|\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}\right| \leq \frac{x^3}{3}.$$
3. En observant que $(0,003)^3/3 \leq 10^{-9}$, en déduire une valeur approchée de $\ln(1,003)$ à 10^{-8} près.

Correction :

1. f est bien de classe C^3 et $f'''(x) = \dfrac{2}{(1+x)^3}$.
2. Comme $x > 0$, on en déduit que
$$\forall t \in [0,x], \quad |f'''(t)| \leq 2.$$
3. L'inégalité de Taylor appliquée à f donne donc
$$\left|\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}\right| \leq \frac{x^3}{3}.$$
4. On a $(0,003)^3/3 = 9 \times 10^{-9} \leq 10^{-8}$. Une valeur approchée à 10^{-8} près de $\ln(1,003)$ est donc
$$0,003 - (0,003)^3/2 = 0,002995.$$

Exercice 4 : DL et calcul de limites

Déterminer les limites des fonctions suivantes :

1. $\dfrac{\sin(x) - x}{x^3}$ en 0,
2. $\dfrac{1 + \ln(1 + x) - e^x}{1 - \cos(x)}$ en 0.

Correction :

1. On fait un DL à l'ordre 3 du numérateur. On a
$$\frac{\sin(x) - x}{x^3} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - x}{x^3} = \frac{-\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^3} = -\frac{1}{6} + o(1).$$
La limite est donc $-1/6$.
2. On fait un DL à l'ordre 2 du numérateur et du dénominateur. On a
$$\frac{1 + \ln(1 + x) - e^x}{1 - \cos(x)} = \frac{1 + x - \frac{x^2}{2} - 1 - x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{1 - 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)} = \frac{-x^2 + o(x^2)}{\frac{x^2}{2} + o(x^2)} = -2 + o(1).$$

Exercice 5 : Étude locale d'une courbe

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 2)$.

1. Donner le développement limité de f à l'ordre 3 en 0.
2. Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0.
3. Étudier la position relative de la courbe et de la tangente au voisinage de ce point.

Correction :

1. On écrit
$$f(x) = \ln 2 + \ln\left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right).$$
Posons $u = x + \dfrac{x^2}{2}$.
On utilise que $\ln(1 + u) = u - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + o(u^3)$ et
$$\begin{aligned} u &= x + \frac{x^2}{2}, \\ u^2 &= x^2 + x^3 + o(x^3), \\ u^3 &= x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$
Ce qui donne
$$f(x) = \ln 2 + x - \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$
2. La courbe représentative de f admet donc au point $(0, \ln 2)$ une tangente d'équation $y = \ln 2 + x$.

3. On observe que
$$f(x) - (\ln 2 + x) = -\frac{x^3}{6} + o(x^3).$$
La différence est donc positive au voisinage de 0^- et négative au voisinage de 0^+. La courbe traverse donc sa tangente au point $(0, \ln 2)$.

Exercice 6 : Diagonalisation

Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$ une matrice symétrique (de taille $2x2$).

1. Démontrer que A est diagonalisable.
2. Le résultat est-il encore vrai si $A \in M_2(\mathbb{C})$? Considérer le cas particulier
$$A = \begin{pmatrix} 2 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Correction :

— On pose $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A(x) = x^2 - (a+d)x + ad - b^2$. C'est un polynôme de degré 2, dont le discriminant vaut
$$\Delta = (a-d)^2 + 4b^2 \geq 0.$$
Si $\Delta > 0$, alors $\chi_A(x)$ possède deux racines distinctes, donc A possède deux valeurs propres distinctes et A est diagonalisable. Si $\Delta = 0$, alors comme la somme de deux carrés, on a nécessairement $a - d = 0 = 4b^2$, soit $a = d$ et $b = 0$. Alors A est un multiple de la matrice identité et donc A est diagonalisable. Ce résultat se généralise en dimension supérieure : toute matrice symétrique réelle est diagonalisable (mais preuve compliquée).

— Avec les mêmes notations, on a toujours
$$\Delta = (a-d)^2 + 4b^2.$$
Mais le carré d'un nombre complexe n'est pas forcément positif. Si $\Delta \neq 0$, on peut faire le même raisonnement qu'avant. χ_A admet deux racines complexes distinctes et A est donc bien diagonalisable. Maintenant si $a = 2$, $b = i$ et $d = 0$, on a $\Delta = 0$ est A admet une veleur propre double. Comme A n'est pas un multiple de l'identité, A n'est pas diagonalisable.