Devoir encadré - 31 mars 2023

Durée : 2 heures - Documents autorisés

Exercice 1 : (2 points)

Majorer l'erreur commise par les approximations suivantes :

1. $\cos(1) \simeq 1/2$,
2. $\dfrac{1}{0,999^2} \simeq 1$.

Correction :

1. Posons $h(x) = \cos(x)$ de dérivée $h'(x) = -\sin(x)$. On a $|h'(x)| \leq 1$. Par l'inégalité des accroissements finis, on a donc
$$\left|\cos(1) - \frac{1}{2}\right| = \left|\cos(1) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right| \leq 1 \times \left|1 - \frac{\pi}{3}\right| \leq 5 \times 10^{-2}.$$
2. Posons $g(x) = 1/x^2$ sur $[0,999;1]$, de dérivée $g'(x) = -2/x^3$. Sur cet intervalle $|g'(x)| \leq \dfrac{2}{0,999^3} \leq 3$. Ainsi
$$\left|\frac{1}{0,999^2} - 1\right| = |g(0,999) - g(1)| \leq 3 \times 10^{-3}.$$

Exercice 2 :

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $f(0) = f'(0) = f'(1) = 0$. L'objectif de cet exercice est de démontrer qu'il existe $c \in]0,1[$ tel que
$$f'(c) = \frac{f(c)}{c}.$$

1. Soit $c \in]0,1]$ et M le point de coordonnées $(c, f(c))$. Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point M ainsi qu'une équation de la corde reliant le point M au point $(0, f(0))$. Donner une interprétation géométrique du résultat que l'on veut démontrer et l'illustrer par un dessin.
2. On définit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ si $x \neq 0$ et par $g(0) = 0$. Vérifier que g est continue sur $[0,1]$ et C^1 sur $]0,1]$.
3. Calculer $g'(x)$ pour $x \in]0,1]$.
4. Démontrer le résultat dans le cas $f(1) = 0$.
5. Dans cette question, on suppose $f(1) > 0$.
   (a) Calculer $g(0)$, $g(1)$ et $g'(1)$.
   (b) En déduire que g' s'annule sur $]0,1[$ et conclure.
6. Comment procéder si $f(1) < 0$?

Correction :

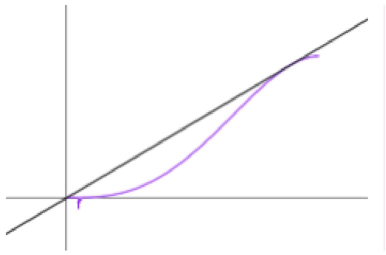
1. La tangente à la courbe en M a pour équation

$$y - f(c) = f'(c)(x - c).$$

La corde reliant $(0, f(0))$ à $M = (c, f(c))$ a pour équation

$$y - f(c) = \frac{f(c) - f(0)}{c - 0}(x - c) = \frac{f(c)}{c}(x - c).$$

On suohaite donc démontrer que si la fonction f s'annule en 0 et si la courbe représentative de f admet des tangentes horizontales en $(0, f(0))$ et en $(1, f(1))$, il existe un point M de la courbe où la tangente à la courbe et la cordre reliant l'origine à M sont confondues.



2. g est de classe C^1 sur $]0, 1]$ comme quotient de deux fonctions de classe C^1 dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus $g(x) = \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} \to f'(0)$ quand $x0^+$. Or $f'(0) = 0 = g(0)$ ce qui prouve la continuité de g en 0.
3. Pour $x > 0$, on a

$$g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}.$$

4. Le réel $c = 1$ convient.
5. (a) On a $g(0) = 0$, $g(1) = f(1) > 0$ et $g'(1) = f'(1) - 1 < 0$.

   (b) Puisque $g(1) > g(0)$, le théorème des accroissements finis

$$g(1) - g(0) = g'(c)(1 - 0) > 0,$$

avec c entre 0 et 1. De plus $g(1) - g(0) = f(1)$. On en déduit que g est croissante sur

Exercice 3 :
Calculer les primitives suivantes.

1. $\displaystyle\int (\ln(t))^2 \mathrm{d}t.$
2. $\displaystyle\int \frac{1}{3 + e^{-t}} \mathrm{d}t.$

Correction :

1. Par IPP, on pose $u(t) = (\ln(t))^2$ et $v'(t) = 1$, d'où $u'(t) = \dfrac{2}{t}\ln(t)$ et $v(t) = t$. D'où
$$\int (\ln(t))^2 \mathrm{d}t = t(\ln|t|)^2 - 2\int \ln(t)\mathrm{d}t.$$
On fait une deuxième IPP, en posant $u(t) = \ln(t)$ et $v'(t) = 1$. D'où $u'(t) = 1/t$ et $v(t) = t$. On obtient
$$\int (\ln(t))^2 \mathrm{d}t = t(\ln|t|)^2 - 2\left[t\ln|t| - \int 1\mathrm{d}t\right] = t(\ln|t|))^2 - 2t\ln|t| + 2t + c.$$
2. On procède par changement de variable. On pose $u = e^x$. Alors $x = \ln(u)$ et $\mathrm{d}u = e^x\mathrm{d}x$ ce qui revient à $\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}u}{u}$. Ainsi
$$\int \frac{1}{3+e^{-t}}\mathrm{d}t = \int \frac{1}{3+\frac{1}{u}}\frac{\mathrm{d}u}{u} = \frac{1}{3}\ln|3u+1| + c = \frac{1}{3}\ln(3e^x+1) + c.$$

Exercice 4 : (4 points)
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. On suppose que $f(a) = f(b) = 0$ et que $f'(a) > 0$, $f'(b) > 0$. Démontrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(c) = 0$.

Correction :
Puisque $f'(a) > 0$, on sait que
$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} > 0.$$
Ceci implique qu'il existe $a_1 \in]a,b[$ tel que $f(a_1) > 0$. En effet, sinon, pour tout $x \geq a$, on aurait $f(x) \leq f(a)$ et donc $f(x) - f(a) \leq 0$, ce qui donnerait
$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq 0$$
et par passage à la limite $f'(a) \leq 0$. De la même façon, en utilisant que $f'(b) > 0$, on montrer qu'il existe $b_1 \in]a,b[$ tel que $f(b_1) < 0$. On applique pour finir le théorème des valeurs intermédiaires entre a et b pour conclure.

Exercice 5 :

1. Montrer que pour tous réels α et β on a
$$\max(\alpha,\beta) = \frac{1}{2}(|\alpha-\beta| + \alpha + \beta).$$
2. Trouver une formule analogue pour $\min(\alpha,\beta)$.
3. Soit $[a,b]$ un intervalle réel. Soient $f, g \in Esc([a,b])$. Montrer que la fonction qui à x associe $\max(f(x), g(x))$ est en escalier.
4. Reprendre la question précédente en remplaçant *en escalier* par *intégrable au sens de Riemann.*
5. Soit $x \in \mathbb{R}$. Etudier la continuité et exprimer la fonction
$$f(x) = \int_0^1 \max(x,t)\mathrm{d}t.$$

Correction :

1. Si $\alpha < \beta$, $\max(\alpha, \beta) = \beta$ et $|\alpha - \beta| = -\alpha + \beta$. On a donc
$$\frac{1}{2}(|\alpha - \beta| + \alpha + \beta) = \frac{1}{2}(-\alpha + \beta + \alpha + \beta = \beta.$$
Inversement si $\alpha > \beta$, $\max(\alpha, \beta) = \alpha$ et $|\alpha - \beta| = \alpha - \beta$. On a
$$\frac{1}{2}(|\alpha - \beta| + \alpha + \beta) = \frac{1}{2}(\alpha - \beta + \alpha + \beta = \alpha.$$
2. $$\min(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}(\alpha + \beta - |\alpha - \beta|).$$
3. Puisque $Esc([a, b])$ est un espace vectoriel, si f et g sont en escaliers, il en est de même pour $f + g$, $f - g$ et $|f - g|$ et donc pour des combinaisons linéaires. Donc $\max(f, g)$ est en escalier.
4. Puisque $\mathcal{L}^1([a, b])$ est un espace vectoriel, si si f et g sont Riemann intégrables, $\max(f, g)$ aussi.
5. On utilise ce qui précède : la fonction $t \mapsto \max(x, t) = \frac{1}{2}(x + t + |x - t|)$ est continue sur $[0, 1]$.
   — Pour $x \leq 0$, $\forall t \in [0, 1]$, $x \leq t$, donc $\max(x, t) = t$ et $f(x) = \int_0^1 t\mathrm{d}t = 1/2$.
   — Pour $x \geq 1$, $\forall t \in [0, 1]$, $x \geq t$ et $\max(x, t) = x$. Alors $f(x) = \int_0^1 x\mathrm{d}t = x$.
   — Si $0 < x < 1$, on utilise Chasles
$$f(x) = \int_0^x x\mathrm{t} + \int_x^1 t\mathrm{d}t = x^2 + \frac{1}{2}(1 - x^2) = \frac{1}{2}(1 + x^2).$$

Exercice 6 :
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tel que $|f(x)| \leq 1$ pour tout $x \in [a, b]$ et
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = b - a.$$
Que dire de f ?

Correction :
On remarque que $b - a = \int_a^b \mathrm{d}x$. Donc
$$\int_a^b (1 - f(t))\mathrm{d}t = 0.$$
Puisque $|f(x)| \leq 1$ sur $[a, b]$, on sait que $1 - f(x)$ est positive sur $[a, b]$ et contine. C'est donc la fonction nulle, ce qui correspond à avoir $f(t) = 1$ pour tout t dans $[a, b]$.