Université de Montpellier & Polytech — L1 PEIP
HA8201H Mathématiques

Devoir encadré - 17 février 2023

Durée : 2 heures - Documents et calculatrices interdits

Exercice 1 : Sous-espaces vectoriels (2 points)
Soit $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $\mathcal{D}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ constitué des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Déterminer si les sous-ensembles de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ suivants sont des sous-espaces vectoriels.

1. (1 point) E_1 l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + a(x)y = 0$, où $a \in \mathcal{D}$.
2. (1 point) E_2 l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + a(x)y = x$, où $a \in \mathcal{D}$.

Correction :

1. La fonction nulle f_0 satisfait l'équation différentielle $f_0'(x)+a(x)f_0(x) = 0$, elle appartient donc à E_1. Soient u et v deux éléments de E_1, c'est-à-dire que $u'(x) + a(x)u(x) = 0$ et $v'(x) + a(x)v(x) = 0$. Considérons leur somme $u + v$. On a
$$(u + v)'(x) = u'(x) + v'(x) = -a(x)u(x) - a(x)v(x) = -a(x)(u + v)(x).$$
On en déduit que $(u + v)'(x) + a(x)(u + v)(x) = 0$, et $u + v \in E_1$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \in E_1$, c'est-à-dire que $u'(x) + a(x)u(x) = 0$. Considérons λu. On a
$$(\lambda u)'(x) = \lambda u'(x) = -\lambda a(x)u(x),$$
soit $(\lambda u)'(x) - a(x)(\lambda u)(x) = 0$. Donc $\lambda u \in E_1$ et E_1 est bien un sous-espace vectoriel.
2. E_2 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ car $f_0 \notin E_2$.

Exercice 2 : Somme directe (6 points)
On note $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soient $F = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})|\ f(0) = f(1) = 0\}$ et G l'ensemble des fonctions de la forme $f(x) = ax + b$ pour a et b deux réels.

1. (2 points)Démontrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.
2. (1 point) Montrer que $F \cap G = \{0\}$.
3. (2 points) Soit $h \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$. Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ tels que la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = h(x) - (ax + b)$ vérifie $f \in F$.
4. (1 point) En déduire que $F \oplus G = \mathcal{F}(\mathbb{R})$.

Correction :

1. La fonction nulle est dans F. Soient $f, g \in F$. Alors $(f+g)(0) = f(0) + g(0) = 0$ et $(f+g)(1) = f(1) + g(1) = 0$. Ainsi $f + g \in F$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a $\lambda f(0) = \lambda f(1) = 0$. Donc $\lambda f \in F$. C'est donc un sous-espace vectoriel. Il en est de même pour G.
2. Soit $f \in F \cap G$. Alors il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout x, $f(x) = ax + b$. Puisque $f(0) = 0$, on a $b = 0$. Et comme $f(1) = 0$, on a aussi $a = 0$. Ainsi $f = 0$ et $F \cap G = \{0\}$.
3. On a $f(0) = h(0) - b = 0$, donc $b = h(0)$. De plus $f(1) = h(1) - (a+b) = h(1) - h(0) - a$. Donc $f(1) = 0$ dès que $a = h(1) - h(0)$.
4. Soit $h \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$. Posons $a = h(1) - h(0)$ et $b = h(0)$. Posons $f(x) = h(x) - (ax + b)$. Alors d'après la question précédente, $f \in F$. De plus pour tout $x \in \mathbb{R}$, on peut écrire
$$h(x) = f(x) + (ax + b),$$
avec $f \in F$ et $x \mapsto ax + b \in G$. On en déduit que $h \in F + G$ et donc que $F + G = \mathcal{F}(\mathbb{R})$. Puisque l'intersection est réduite à l'élément nul, on en déduit que F et G sont supplémentaires dans $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.

Exercice 3 : Base (5 points)

1. (1,5 points) Enoncer le théorème de la base incomplète.
2. Soit $\mathbb{R}[x]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes réels. Soit E le sous-espace de $\mathbb{R}[x]$ engendré par la famille $\mathcal{L}_5 = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$ définie par :
$$p_1(x) = 1, \quad p_2(x) = x, \quad p_3(x) = x + 1, \quad p_4(x) = 1 + x^3, \quad p_5(x) = x - x^3.$$
On cherche à construire une base de E.
   (a) (0,5 point) Montrer que la famille $\mathcal{L}_1 = \{p_1\}$ est libre.
   (b) (1 point) On complète la famille $\mathcal{L}_1$ en la famille $\mathcal{L}_2 = \{p_1, p_2\}$. Montrer que la famille $\mathcal{L}_2$ est libre.
   (c) (2 points) Compléter la famille L_2 en une base de E en utilisant $\mathcal{L}_5$. Justifier soigneusement votre réponse.

Correction :

1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $(x_1, \ldots, x_p)$ une famille libre de E, $p \in \mathbb{N}$. Soit $(y_1, \ldots, y_m)$ une famille génératrice de E, $m \in \mathbb{N}$. Alors on peut construire une base $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, $n \in \mathbb{N}$, vérifiant
   (a) $p \leq n$,
   (b) $e_i = x_i$ pour $i = 1, \ldots, p$,
   (c) pour $i > p$, $e_i \in \{y_1, \ldots, y_m\}$.
2. Montrons que la famille $\mathcal{L}_1 = \{p_1\}$ est libre. Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $ap_1(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Puisque $p_1(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a nécessairement $a = 0$ et la famille est libre.
3. Montrons que $\mathcal{L}_2 = \{p_1, p_2\}$ est libre. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que
$$ap_1(x) + bp_2(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$
On a $a + bx = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. En particulier, c'est vrai en $x = 0$, cela implique donc que $a = 0$. On a par suite $bx = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Donc $b = 0$. La famille est donc libre.

4. Pour compléter la famille $\mathcal{L}_2$, on pioche dans la famille génératrice. On observe que $p_3(x) = x + 1 = p_2(x) + p_1(x)$. On ne peut donc pas utiliser p_3 pour compléter $\mathcal{L}_2$. On considère p_4. La famille $\{p_1, p_2, p_4\}$ est bien libre car p_4 étant de degré 3, il ne s'écrit pas comme une combinaison linéaire de p_1 et p_2. Il reste à considérer p_5 et d'étudier la dépendance linéaire des vecteurs p_1, p_2, p_4 et p_5. Un calcul rapide montre que

$$p_5 = -p_4 + p_1 + p_2,$$

ce qui prouve que la famille $\{p_1, p_2, p_4, p_5\}$ est liée. Donc la famille $\{p_1, p_2, p_4\}$ est une base de E.

Exercice 4 : Application linéaire (5 points)
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par

$$f(x, y) = (x + y, x - y, x + y).$$

1. (1 point) Démontrer que f est linéaire.
2. (1 point) Déterminer le noyau de f.
3. (2 points) Déterminer une base l'image de f puis une équation qui la caractérise.
4. (1 point) f est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?

Correction :

1. Soient $(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$, $(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ et $a \in \mathbb{R}$. On veut montrer que

$$f((u_1, u_2) + a(v_1, v_2)) = f(u_1, u_2) + af(v_1, v_2).$$

On détaille les calculs :

$$\begin{aligned} f((u_1, u_2) + a(v_1, v_2)) &= f(u_1 + av_1, u_2 + av_2) \\ &= (u_1 + av_1 + u_2 + av_2, u_1 + av_1 - u_2 - av_2, u_1 + av_1 + u_2 + av_2) \\ &= (u_1 + u_2 + a(v_1 + v_2), u_1 - u_2 + a(v_1 - v_2), u_1 + u_2 + a(v_1 + v_2)) \\ &= f(u_1, u_2) + af(v_1, v_2). \end{aligned}$$

L'application f est bien linéaire.

2. On cherche le noyau de f, c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^2$ qui annulent f :

$$\mathrm{Ker}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \ f(x, y) = (0, 0, 0)\}.$$

Soit $(x, y) \in \mathrm{Ker}(f)$, alors on a le système

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \\ x + y = 0. \end{cases}$$

On observe que la dernière équation est redondante. Le système revient à

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0, \end{cases}$$

soit $2x = 0$ c'est-à-dire $x = 0$. On en déduit que $y = 0$ et le noyau de f est réduit au vecteur nul :

$$\mathrm{Ker}(f) = \{(0,0)\}.$$

De manière équivalente, on aurait pu travailler sur la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

pour en déduire qu'un vecteur $(x, y) \in \mathrm{Ker}(f)$ satisfait $y = 0$ et donc $x = 0$.

On peut noter que la dimension du noyau est 0.

3. On veut déterminer l'image de f. Par le théorème du rang, on sait que la dimension de l'image de f est égale à celle de $\mathbb{R}^2$, car

$$\dim(\mathbb{R}^2) = \dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Ker}(f)).$$

L'image de f est un espace de dimension 2.

On considère les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^2$: $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$. L'image de l'application f correspond à $f(e_1)$ et $f(e_2)$:

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f(e_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs obtenus sont linéairement indépendants et forment donc une base de $\mathrm{Im}(f)$

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{vect}((1, 1, 1), (1, -1, 1)).$$

On aurait pu directement voir que les vecteurs $f(e_1)$ et $f(e_2)$ sont les deux premières colonnes de la matrice de représentation de f. Comme la dimension de $\mathbb{R}^3$ est 3, et que la base de $\mathrm{Im}(f)$ compte deux éléments, on peut aussi caractériser $Im(f)$ par 3-2=1 équation. On l'obtient en considérant un vecteur $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$ dans $Im(f)$. On applique la réduction de Gauss au système

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & u \\ 1 & -1 & v \\ 1 & 1 & w \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & u \\ 0 & -2 & v-u \\ 0 & 0 & w-u \end{pmatrix}.$$

On en déduit que l'image de f est décrit par

$$\mathrm{Im}(f) = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 |\ w - u = 0\}.$$

4. Puisque $\mathrm{Ker}(f) = \{(0,0)\}$, f est injective. Par contre, on observe que $(1, 1, 0)$ n'appartient pas à $\mathrm{Im}(f)$. Donc f n'est pas surjective. On pourrait aussi raisonner sur les dimensions : $dim(Im(f)) = 2 \neq 3$ donc $Im(f) \neq \mathbb{R}^3$, donc f n'est pas surjective.

Elle n'est donc pas bijective.

Exercice 5 : Somme directe encore (2 points)

Soient $u = (1, 1, \dots, 1)$ et $F = \mathrm{vect}(u)$. Soit $G = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n |\ x_1 + \ldots + x_n = 0\}$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Démontrer que $\mathbb{R}^n = F \oplus G$.

Correction :
On observe que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ car c'est le noyau de la forme linéaire $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_1 + \ldots + x_n$. Soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
Soit $x \in F \cap G$. D'une part $x \in F$ c'est à dire qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $x = a(1, \ldots, 1) = (a, \ldots, a)$. D'autre part $x \in G$ c'est à dire que $\sum_{i=1}^{n} a = 0$ ce qui donne $an = 0$. Donc nécessairement $a = 0$ et x est le vecteur nul. On a donc $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.
Montrons que tout élément de $\mathbb{R}^n$ se décompose de manière unique en une somme d'un élément de F et d'un élément de G. On considère $x \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda u \in F$.
On a :

$$x - \lambda u \in G \Leftrightarrow (x_1 - \lambda, \ldots, x_n - \lambda) \in G \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} (x_k - \lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, il existe un unique $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x - \lambda u \in G$.
Comme la décomposition est unique, on a bien $\mathbb{R}^n = F \oplus G$.