Exercice 1. Calculer les développements limités suivants :

a) $\sin(2x)e^{3x}$ à l'ordre 4 en zéro.

b) $\frac{\ln(1+x)}{e^x \sin(x)}$ à l'ordre 3 en zéro.

Exercice 2. Calculer la limite en 0 de $\frac{1}{x(e^x-1)} - \frac{1}{x^2}$ au moyen d'un développement limité.

Exercice 3. Soit f la fonction définie par

$$f(x) = 1 + 2\arctan(x) + 2(\sin(x))^2 - \exp(2x)$$

Pour quelle(s) puissance(s) $k \in \mathbb{N}$ a-t-on $f(x) = o(x^k)$ en 0.

Exercice 4. Déterminer et positionner par rapport au graphe l'asymptote oblique de la fonction $f(x) = ((x^2+1)(x+1)^2)^{1/4}$ en $+\infty$.

Exercice 5. Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\sin(x)}\mathrm{d}x \quad I_2 = \int_0^1 \frac{x\mathrm{d}x}{x^2-2x-3}$$

Exercice 6. Soit

$$E = \{\phi \in C([0,1]) \text{ t.q. } \phi \in C^2(]0,1/2[) \cup C^2(]1/2,1[)\}.$$

(1) Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

(2) Montrer que l'application

$$\begin{array}{rccl} D_2 : & E & \longrightarrow & \mathcal{F}(]0,1[\setminus\{1/2\};\mathbb{R}) \\ & f & \longmapsto & f\text{''} \end{array}$$

est bien définie et linéaire.

(3) Montrer que $\operatorname{Ker} D$ est de dimension finie et préciser sa dimension.