Exercice 1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On suppose que $\pi \in \mathcal{L}(E)$ satisfait $\pi \circ \pi = \pi$.

(1) Monter que $\operatorname{Ker}\pi \cap \operatorname{Im}\pi = \{0_E\}$.

(2) On suppose que E est de dimension finie, en déduire que $\operatorname{Ker}\pi$ et $\operatorname{Im}\pi$ sont supplémentaires par un argument de dimension.

(3) On ne suppose plus que E est de dimension finie, en écrivant que tout $\mathbf{x} \in \mathbf{E}$ sécrit $\mathbf{x} = \mathbf{x} - \pi(\mathbf{x}) + \pi(\mathbf{x})$ montrer que $\operatorname{Ker}\pi$ et $\operatorname{Im}\pi$ sont supplémentaires.

Exercice 2. Soit

$$\begin{array}{rccc} \pi : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 2x+y+z \\ -x-z \\ -x-y \end{pmatrix} \end{array}$$

(1) Ecrire la matrice A de π dans la base canonique $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$.

(2) Montrer que $\pi \circ \pi = \pi$. Que peut-on dire de $\operatorname{Ker}\pi$ et $\operatorname{Im}\pi$ (sans calcul) ?

(3) Calculer une base $\hat{\mathcal{E}}$ de $\mathbb{R}^3$ dont le premier vecteur est un vecteur de $\operatorname{Ker}\pi$ et le dernier un vecteur de $\operatorname{Im}\pi$.

(4) Calculer la matrice de π dans la base $\hat{\mathcal{E}}$.

(5) Etant donné $\lambda \in \mathbb{R}$ calculer $\det(A - \lambda\mathbb{I}_3)$.

Exercice 3. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\begin{array}{rccl} f : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} \sin(1/x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

(1) Montrer que f n'est pas continue sur $[0,1]$

(2) Etant donné $\alpha \in]0,1[$, montrer que la restriction de f à $[\alpha, 1]$ est intégrable .

(3) Expliciter deux constantes m et M telles que, pour tout $\alpha \in]0,1[$ on a :

$$m \le f(t) \le M \quad \forall\, t \in]0,\alpha[.$$

(4) En combinant les résultats des questions (2) et (3), montrer que f est intégrable sur $[0,1]$ en revenant à la définition.

Exercice 4. Dans cet exercice f est une fonction continue sur $[0,1]$. On veut montrer que cette fonction est intégrable. On fixe donc $\varepsilon > 0$ et on veut construire deux fonctions en escalier u, U telles que

$$\bullet)\ u(t) \le f(t) \le U(t) \qquad \forall\, t \in [0,1], \qquad\qquad \bullet)\ \int_0^1 (U(t) - u(t))\mathrm{d}t \le \varepsilon.$$

(1) On se propose de construire tout d'abord une fonction auxiliaire $\phi_\varepsilon : [0,1] \to [0,1]$. Soit $x \in [0,1]$

(a) Montrer que $\{z \in [x,1] \text{ t.q. } |f(t) - f(x)| < \varepsilon/2 \text{ pour tout } t \in [x,z]\}$ est non vide et majoré.

(b) En déduire qu'on peut poser

$$\phi_\varepsilon(x) = \sup\{z \in [x, 1] \text{ t.q. } |f(t) - f(x)| < \varepsilon/2 \text{ pour tout } t \in [x, z]\}$$

et qu'avec ce choix, on a :

- $\phi_\varepsilon(x) > x$ si $x < 1$.
- $\max\{f(x), x \in [x, \phi(x)]\} - \min\{f(x), x \in [x, \phi(x)]\} < \varepsilon$.

(2) Soit maintenant la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_{n+1} = \phi_\varepsilon(x_n) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

(a) Montrer que $x_n = 1$ a partir d'un certain rang (qu'on note N dans la suite).
Indication : On pourra montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et utiliser sans démontrer qu'alors, pour tout $\alpha > 0$, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|x_n - \ell| < \alpha$ pour tout $n \geq N_0$.

(b) Montrer que $(x_0, \ldots, x_N)$ est une subdivision de $[0, 1]$.

(3) On pose dans cette question :

$$u = \min\left(f, \sum_{k=0}^{N-1} \min\{f(\sigma), \sigma \in [x_k, x_{k+1}]\}\mathbf{1}_{[x_k, x_{k+1}]}\right)$$

$$U = \max\left(f, \sum_{k=0}^{N-1} \max\{f(\sigma), \sigma \in [x_k, x_{k+1}]\}\mathbf{1}_{[x_k, x_{k+1}]}\right).$$

(a) Montrer que u et U sont en escalier

(b) Montrer que $u \leq f \leq U$

(c) Montrer que

$$\int_0^1 (U(t) - u(t))\mathrm{d}t \leq \varepsilon.$$