Exercice 1. Dans $\mathbb{R}^5$ on note

$$F = \{(x, y, z, t, u) \in \mathbb{R}^5 \text{ t.q. } x + y - 2z = 3z + 2t - u = x + y + z + t + u = 0\}$$
$$G = \mathrm{Vect}((1, 1, -2, 0, 0), (0, 0, 3, 2, -1), (1, 1, 1, 1, 1))$$

(1) Justifier que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$ et en construire une base.

(2) Justifier que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$ et calculer sa dimension.

(3) Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^5$.

Exercice 2. Pour cet exercice, on rappelle que pour toute matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ on note $A^\top = (a'_{i,j}) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice telle que :

$$a'_{i,j} = a_{j,i} \quad \forall (i, j) \in \{1, 2, 3\}^2$$

On s'intéresse dans cet exercice aux propriétés de l'ensemble

$$F = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \text{ t.q. } M = -M^\top\}.$$

et de ses éléments.

(1) Dans cette question, on considère l'application

$$\begin{array}{rccc} \phi : & \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \\ & M & \longmapsto & \dfrac{M - M^\top}{2} \end{array}$$

(a) Montrer que ϕ est linéaire et que $F = \mathrm{Im}(\phi)$

(b) En déduire que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ainsi qu'une base de F

(2) Dans cette question on considère $M \in F$

(a) Montrer qu'il existe $(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Etant donné $X \in \mathbb{R}^3$ de composantes (x_1, x_2, x_3), comparer MX et le produit vectoriel de X avec le vecteur ω de coordonnées $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$.

Exercice 3. Dans cet exercice on note P_1 l'ensemble des fonctions f telles que :
— $f \in C([0, 1])$
— il existe $(a_-, b_-) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x) = a_- x + b_-$ pour $x \in [0, 1/2]$
— il existe $(a_+, b_+) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x) = a_+ x + b_+$ pour $x \in [1/2, 1]$

(1) Montrer que P_1, muni des opérations usuelles sur les fonctions, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

(2) Construire une fonction $\pi_- \in P_1$ tel que

$$\pi_-(0) = 1 \quad \pi_-(1/2) = 0 \quad \pi_-(1) = 0$$

(3) On pose $\pi_+(x) = \pi_-(1 - x)$. Montrer que $\pi_+ \in P_1$ et calculer $\pi_+(0), \pi_+(1/2), \pi_+(1)$.

(4) Construire π_0 tel que $\pi_0(0) = \pi_0(1) = 0$ et $\pi_0(1/2) = 1$.

(5) Montrer que (π_0, π_-, π_+) est une base de P_1 puis calculer la dimension de P_1.

(6) Montrer que, pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, il existe un unique $\pi \in P_1$ tel que $\pi(0) = a$, $\pi(1/2) = b$ et $\pi(1) = c$.

Exercice 4. Calculer les déterminants suivants :.

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_2(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 1 \\ -1 & \lambda & 0 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda & 2 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda \end{pmatrix} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$