



Exercice 1. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. On suppose que $\pi \in \mathcal{L}(E)$ satisfait $\pi \circ \pi = \pi$.

- (1) Montrer que $\text{Ker } \pi \cap \text{Im } \pi = \{0_E\}$.
- (2) On suppose que E est de dimension finie, en déduire que $\text{Ker } \pi$ et $\text{Im } \pi$ sont supplémentaires par un argument de dimension.
- (3) On ne suppose plus que E est de dimension finie, en écrivant que tout $\mathbf{x} \in E$ s'écrit $\mathbf{x} = \mathbf{x} - \pi(\mathbf{x}) + \pi(\mathbf{x})$ montrer que $\text{Ker } \pi$ et $\text{Im } \pi$ sont supplémentaires.

Exercice 2. Soit

$$\pi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x + y + z \\ -x - z \\ -x - y \end{pmatrix}$$

- (1) Ecrire la matrice A de π dans la base canonique \mathcal{E} de \mathbb{R}^3 .
- (2) Montrer que $\pi \circ \pi = \pi$. Que peut-on dire de $\text{Ker } \pi$ et $\text{Im } \pi$ (sans calcul) ?
- (3) Calculer une base $\hat{\mathcal{E}}$ de \mathbb{R}^3 dont le premier vecteur est un vecteur de $\text{Ker } \pi$ et le dernier un vecteur de $\text{Im } \pi$.
- (4) Calculer la matrice de π dans la base $\hat{\mathcal{E}}$.
- (5) Etant donné $\lambda \in \mathbb{R}$ calculer $\det(A - \lambda I_3)$.

Exercice 3. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} \sin(1/x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- (1) Montrer que f n'est pas continue sur $[0, 1]$
- (2) Etant donné $\alpha \in]0, 1[$, montrer que la restriction de f à $[\alpha, 1]$ est intégrable .
- (3) Expliciter deux constantes m et M telles que, pour tout $\alpha \in]0, 1[$ on a :

$$m \leq f(t) \leq M \quad \forall t \in]0, \alpha[.$$

- (4) En combinant les résultats des questions (2) et (3), montrer que f est intégrable sur $[0, 1]$ en revenant à la définition.

Exercice 4. Dans cet exercice f est une fonction continue sur $[0, 1]$. On veut montrer que cette fonction est intégrable. On fixe donc $\varepsilon > 0$ et on veut construire deux fonctions en escalier u, U telles que

$$\bullet u(t) \leq f(t) \leq U(t) \quad \forall t \in [0, 1], \quad \bullet \int_0^1 (U(t) - u(t)) dt \leq \varepsilon.$$

- (1) On se propose de construire tout d'abord une fonction auxiliaire $\phi_\varepsilon : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$.
Soit $x \in [0, 1]$

(a) Montrer que $\{z \in [x, 1] \text{ t.q. } |f(t) - f(x)| < \varepsilon/2 \text{ pour tout } t \in [x, z]\}$ est non vide et majoré.

(b) En déduire qu'on peut poser

$$\phi_\varepsilon(x) = \sup\{z \in [x, 1] \text{ t.q. } |f(t) - f(x)| < \varepsilon/2 \text{ pour tout } t \in [x, z]\}$$

et qu'avec ce choix, on a :

- $\phi_\varepsilon(x) > x$ si $x < 1$.
- $\max\{f(x), x \in [x, \phi_\varepsilon(x)]\} - \min\{f(x), x \in [x, \phi_\varepsilon(x)]\} < \varepsilon$.

(2) Soit maintenant la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_{n+1} = \phi_\varepsilon(x_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

(a) Montrer que $x_n = 1$ à partir d'un certain rang (qu'on note N dans la suite).

Indication : On pourra montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et utiliser sans démontrer qu'alors, pour tout $\alpha > 0$, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|x_n - \ell| < \alpha$ pour tout $n \geq N_0$.

(b) Montrer que (x_0, \dots, x_N) est une subdivision de $[0, 1]$.

(3) On pose dans cette question :

$$u = \min \left(f, \sum_{k=0}^{N-1} \min\{f(\sigma), \sigma \in [x_k, x_{k+1}]\} \mathbf{1}_{[x_k, x_{k+1}]} \right)$$

$$U = \max \left(f, \sum_{k=0}^{N-1} \max\{f(\sigma), \sigma \in [x_k, x_{k+1}]\} \mathbf{1}_{[x_k, x_{k+1}]} \right).$$

(a) Montrer que u et U sont en escalier

(b) Montrer que $u \leq f \leq U$

(c) Montrer que

$$\int_0^1 (U(t) - u(t)) dt \leq \varepsilon.$$