DE2 - HLMA206 - 2018/2019

ALGÈBRE LINÉAIRE – INTÉGRATION

Exercice 1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On suppose que $\pi \in \mathcal{L}(E)$ satisfait $\pi \circ \pi = \pi$.

(1) Monter que $\operatorname{Ker}\pi \cap \operatorname{Im}\pi = \{0_E\}$.

Soit $\mathbf{x} \in \operatorname{Ker}\pi \cap \operatorname{Im}\pi$. On a donc d'une part $\pi(\mathbf{x}) = 0_E$ et d'autre part, il existe $\mathbf{y} \in E$ tel que $\mathbf{x} = \pi(\mathbf{y})$. Or $\pi \circ \pi = \pi$ donc en particulier

$$\mathbf{x} = \pi(\mathbf{y}) = \pi \circ \pi(\mathbf{y}) = \pi(\pi(\mathbf{y})) = \pi(\mathbf{x}) = 0_E.$$

Ceci termine la preuve.

(2) On suppose que E est de dimension finie, en déduire que $\operatorname{Ker}\pi$ et $\operatorname{Im}\pi$ sont supplémentaires par un argument de dimension.

On sait que $\operatorname{Ker}\pi$ et $\operatorname{Im}\pi$ sont en somme directe. D'autre part, comme E est de dimension finie, le théorème du rang garantit que

$$\dim \operatorname{Ker}\pi + \dim \operatorname{Im}\pi = \dim E.$$

Par conséquent $\operatorname{Ker}\pi \oplus \operatorname{Im}\pi$ est un sous-espace de E tel que

$$\begin{aligned}\dim(\operatorname{Ker}\pi \oplus \operatorname{Im}\pi) &= \dim(\operatorname{Ker}\pi) + \dim(\operatorname{Im}\pi) - \dim(\operatorname{Ker}\pi \cap \operatorname{Im}\pi)\\ &= \dim(\operatorname{Ker}\pi) + \dim(\operatorname{Im}\pi) = \dim E.\end{aligned}$$

Donc $\operatorname{Ker}\pi \oplus \operatorname{Im}\pi = E$ et $\operatorname{Ker}\pi$ et $\operatorname{Im}\pi$ sont supplémentaires.

(3) On ne suppose plus que E est de dimension finie, en écrivant que tout $\mathbf{x} \in \mathbf{E}$ sécrit $\mathbf{x} = \mathbf{x} - \pi(\mathbf{x}) + \pi(\mathbf{x})$ montrer que $\operatorname{Ker}\pi$ et $\operatorname{Im}\pi$ sont en somme directe.

On sait déjà que $\operatorname{Ker}\pi \cap \operatorname{Im}\pi = \{0_E\}$. Il suffit donc de montrer que $E \subset \operatorname{Ker}\pi + \operatorname{Im}\pi$ pour conclure. Soit $\mathbf{x} \in E$, écrivons $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z}$ avec $\mathbf{y} = \pi(\mathbf{x})$ et $\mathbf{z} = \mathbf{x} - \pi(\mathbf{x})$. Alors il est clair que $\mathbf{y} \in \operatorname{Im}\pi$ et que

$$\pi(\mathbf{z}) = \pi(\mathbf{x}) - \pi(\pi(\mathbf{x})) = \pi(\mathbf{x}) - \pi \circ \pi(\mathbf{x}) = \pi(\mathbf{x}) - \pi(\mathbf{x}) = 0_E;$$

Donc $\mathbf{z} \in \operatorname{Ker}\pi$.

Exercice 2. Soit

$$\begin{array}{rccc}\pi : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3\\ & \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix}2x+y+z\\-x-z\\-x-y\end{pmatrix}\end{array}$$

(1) Ecrire la matrice A de π dans la base canonique $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$.

On a

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) Montrer que $\pi \circ \pi = \pi$. Que peut-on dire de $\operatorname{Ker} \pi$ et $\operatorname{Im} \pi$ (sans calcul) ?

On sait que la matrice de $\pi \circ \pi$ dans la base canonique est $A * A$. On fait donc ce calcul matriciel et on trouve $A * A = A$. Donc $\pi \circ \pi$ a la même matrice dans la base canonique que π. C'est donc π.

(3) Calculer une base $\hat{\mathcal{E}}$ de $\mathbb{R}^3$ dont le premier vecteur est un vecteur de $\operatorname{Ker} \pi$ et le dernier un vecteur de $\operatorname{Im} \pi$.

D'après les réponses au premier exercice on sait que $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker} \pi \oplus \operatorname{Im} \pi$. Par conséquent, on obtient une base de $\mathbb{R}^3$ en concaténant une base de $\operatorname{Ker} \pi$ et une base de $\operatorname{Im} \pi$. On calcule une base de $\operatorname{Ker} \pi$ en résolvant $AX = 0$, et on trouve

$$\operatorname{Ker} \pi = \langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

On sait alors qu'une base de $\operatorname{Im} \pi$ contient deux vecteurs qui peuvent être pris comme des colonne de A. On propose donc d'écrire :

$$\operatorname{Im} \pi = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$$

On notera que la famille retenue est libre (les deuxièmes et troisièmes lignes des deux vecteurs sont alternativement nulles et non nulles) et forme donc une base de $\operatorname{Im} \pi$. Finalement on propose la base :

$$\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

(4) Calculer la matrice de π dans la base $\hat{\mathcal{E}}$.

Après calcul, on trouve que les deux derniers vecteurs de $\hat{\mathcal{E}}$ sont égaux à leur image par π. Comme le premier est un élément du noyau on trouve donc

$$Mat_{\hat{\mathcal{E}} \to \hat{\mathcal{E}}}(\pi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(5) Etant donné $\lambda \in \mathbb{R}$ calculer $\det(A - \lambda \mathbb{I}_3)$.

On trouver $\det(A - \lambda \mathbb{I}_3) = -\lambda(\lambda - 1)^2$

Exercice 3. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f: \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \sin(1/x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

(1) Montrer que f n'est pas continue sur $[0,1]$

En tant que composées de fonctions usuelles, f est continue sur $]0,1]$. Il s'agit donc de montrer que f n'est pas continue en 0 soit :

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall\, \alpha > 0\,, \exists x_\alpha \in]0,\alpha[\text{ tel que } |f(x)| > \varepsilon.$$

Posons $\varepsilon = 1/2$ alors, pour tout $\alpha > 0$ posons $x_\alpha = 2/(\pi(1+2\mathrm{E}(1/\alpha))$ avec E la fonction "partie entière." On remarque ici que

$$1 + 2E(1/\alpha) \geq 1 + E(1/\alpha) > \frac{1}{\alpha} \text{ et } \frac{2}{\pi} < 1.$$

Donc $0 < x_\alpha < \alpha$ et $|f(x_\alpha)| = |\pm\sin(\pi/2)| = 1$. On a donc bien $x_\alpha \in]0,\alpha[$ et $|f(x_\alpha)| > \varepsilon$.

(2) Etant donné $\alpha \in]0,1[$, montrer que la restriction de f à $[\alpha,1]$ est intégrable .

On a vu a la question précédente que f est continue sur $[\alpha,1]$. Par un résultat du cours, elle est donc intégrable sur $[\alpha,1]$.

(3) Expliciter deux constantes m et M telles que, pour tout $\alpha \in]0,1[$ on a :

$$m \leq f(t) \leq M \quad \forall\, t \in]0,\alpha[.$$

Par définition, $f(t)$ est le sinus d'un angle pour toute valeur de $t \in]0,1]$. En particulier $-1 \leq f(t) \leq 1$. On remarque que cette inégalité est également satisfaite pour $t = 0$. On peut donc choisir $m = -1$ et $M = 1$ et on obtient, que, pour tout $\alpha \in]0,1[$ et $t \in [0,\alpha]$ on a $t \in [0,1]$ donc

$$-1 \leq f(t) \leq 1.$$

(4) En combinant les résultats des questions (2) et (3), montrer que f est intégrable sur $[0,1]$ en revenant à la définition.

Fixons $\varepsilon > 0$. Il s'agit de montrer qu'il existe u, U en escalier sur $[0,1]$ telles que

$$\bullet)\ u(t) \leq f(t) \leq U(t) \qquad \forall\, t \in [0,1], \qquad\qquad \bullet)\ \int_0^1 (U(t) - u(t))\mathrm{d}t \leq \varepsilon.$$

Posons $\alpha = \varepsilon/4$. Alors, d'après la question (2) f est intégrable sur $[\alpha,1]$, donc il existe $\tilde{u}, \tilde{U}$ en escalier sur $[\alpha,1]$ telles que

$$\bullet)\ \tilde{u}(t) \leq f(t) \leq \tilde{U}(t) \qquad \forall\, t \in [\alpha,1], \qquad\qquad \bullet)\ \int_\alpha^1 (\tilde{U}(t) - \tilde{u}(t))\mathrm{d}t \leq \varepsilon/2.$$

Posons maintenant

$$u(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } t < \alpha \\ \tilde{u}(t) & \text{si } t \geq \alpha \end{cases} \qquad U(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t < \alpha \\ \tilde{U}(t) & \text{si } t \geq \alpha \end{cases}$$

Alors, montrons par exemple que u est en escalier sur $[0,1]$ (on montre de même que U est en escalier sur $[0,1]$). Puisque $\tilde{u}$ est en escalier sur $[\alpha,1]$, il existe une subdivision $(x_0,\ldots,x_N)$ de $[\alpha,1]$ adaptée à $\tilde{u}$. Montrons que $y_0 = 0, y_i = x_{i-1}$ pour $i \in \{1,\ldots,N+1\}$ est adaptée à u. En effet, pour tout $i \in \{0,\ldots,N+1\}$ on a,

— si $i = 0$ alors $u(t) = -1$ sur $]y_i, y_{i+1}[=]0, \alpha[$

— si $i \geq 1$ alors $u(t) = \tilde{u}(t)$ sur $]y_i, y_{i+1}[=]x_{i-1}, x_i[$ or $\tilde{u}$ est constant sur cet intervalle donc u également.

Vérifions maintenant les deux items que u et U doivent satisfaire. Premièrement, pour $t \in [0, 1]$

— si $t \in [0, \alpha[$ alors $u(t) = -1 \leq f(t) \leq 1 = U(t)$ par le résultat de la question (3)

— si $t \in [\alpha, 1]$ alors $u(t) = \tilde{u}(t) \leq f(t) \leq \tilde{U}(t) = U(t)$ par choix de $\tilde{u}$ et $\tilde{U}$.

Finalement, par la relation de Chasles et le choix de α :

$$\begin{aligned}\int_0^1 (U(t) - u(t))\mathrm{d}t &= \int_0^\alpha 2\mathrm{d}t + \int_\alpha^1 (\tilde{U}(t) - \tilde{u}(t))\mathrm{d}t \\ &\leq 2\alpha + \varepsilon/2 \leq \varepsilon.\end{aligned}$$

Exercice 4. Dans cet exercice f est une fonction continue sur $[0, 1]$. On veut montrer que cette fonction est intégrable. On fixe donc $\varepsilon > 0$ et on veut construire deux fonctions en escalier u, U telles que

$$\bullet)\ u(t) \leq f(t) \leq U(t) \qquad \forall\, t \in [0, 1], \qquad\qquad \bullet)\ \int_0^1 (U(t) - u(t))\mathrm{d}t \leq \varepsilon.$$

(1) On se propose de construire tout d'abord une fonction auxiliaire $\phi_\varepsilon : [0, 1] \to [0, 1]$. Soit $x \in [0, 1]$

(a) Montrer que $\{z \in [x, 1] \text{ t.q. } |f(t) - f(x)| < \varepsilon/2 \text{ pour tout } t \in [x, z]\}$ est non vide et majoré.

Notons Z_x cet ensemble. Cet ensemble contient x et est majoré par 1.

(b) En déduire qu'on peut poser

$$\phi_\varepsilon(x) = \sup\{z \in [x, 1] \text{ t.q. } |f(t) - f(x)| < \varepsilon/2 \text{ pour tout } t \in [x, z]\}$$

et qu'avec ce choix, on a :

- $\phi_\varepsilon(x) > x$ si $x < 1$.
- $\max\{f(x), x \in [x, \phi_\varepsilon(x)]\} - \min\{f(x), x \in [x, \phi_\varepsilon(x)]\} < \varepsilon$.

Comme Z_x est non vide majoré, on peut construire sa bonne supérieure $\phi_\varepsilon(x)$. Montrons que ce réel satisfait les deux propriétés requises. D'abord, si $x < 1$, alors, comme f est continue en x il existe $\alpha > 0$ tel que $|f(x) - f(x')| < \varepsilon/2$ pour tout $x' \in]x - \alpha, x + \alpha[$. En particulier, $z = x + \alpha/2$ est tel que si $t \in [x, z]$ alors $t \in]x - \alpha, x + \alpha[$ donc

$$|f(x) - f(t)| < \varepsilon/2.$$

On a donc $z \in Z_x$ et $\phi_\varepsilon(x) \geq z > x$ ce qui est le premier item. Pour le second, on remarque que $[x, \phi_\varepsilon(x)]$ est un segment fermé, donc la restriction de f (qui est continue sur $[0, 1]$ donc sur cet intervalle) à cet intervalle est bornée et atteint ses bornes. On a donc :

$$\max\{f(x), x \in [x, \phi_\varepsilon(x)]\} = f(z_+) \qquad \min\{f(x), x \in [x, \phi_\varepsilon(x)]\} = f(x_-)$$

avec $(z_+, z_-) \in [x, \phi_\varepsilon(x)]^2$. En particulier, la différence à calculer se réécrit

$$f(z_+) - f(z_-) = f(z_+) - f(x) + f(x) - f(z_-).$$

Or, par définition, de $\phi_\varepsilon(x)$ on a :

$$0 \leq f(z_+) - f(x) = |f(z_+) - f(x)| \leq \varepsilon/2 \quad 0 \leq f(x) - f(z_-) = |f(x) - f(z_-)| \leq \varepsilon/2.$$

On obtient le résultat voulu en ajoutant ses deux dernières inégalités.

(2) Soit maintenant la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_{n+1} = \phi_\varepsilon(x_n) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

(a) Montrer que $x_n = 1$ a partir d'un certain rang (qu'on note N dans la suite).
<u>Indication :</u> On pourra montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et utiliser sans démontrer qu'alors, pour tout $\alpha > 0$, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|x_n - \ell| < \alpha$ pour tout $n \geq N_0$.

Procédons par l'absurde. On remarque que $\phi_\varepsilon(1) = 1$. Donc si x_N prend la valeur 1 alors par récurrence immédiate $x_n = 1$ pour $n \geq N$. La négation de l'assertion proposée est donc : x_n ne prend jamais la valeur 1. Comme $x_n \in [0, 1]$ cela revient à dire que $x_n < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On remarque alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a montré que $\phi_\varepsilon(x_n) = x_{n+1} > x_n$ donc la suite (x_n) est (strictement) croissante. Comme elle est croissante majorée elle est donc convergente. Posons ℓ cette limite. On a $\ell \in [0, 1]$ et f continue en ℓ donc il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in [0, 1] \quad |x - \ell| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(\ell)| < \varepsilon/4.$$

Or, d'après l'indication, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|x_N - \ell| < \alpha$. Alors, pour tout $t \in [x, \ell + \alpha]$ on a

$$|f(x) - f(t)| \leq |f(x) - f(\ell)| + |f(t) - f(\ell)| \leq \varepsilon/4 + \varepsilon/4 \leq \varepsilon/2$$

On a donc $\ell + \alpha \in Z_{x_N}$ et $x_{N+1} \geq \ell + \alpha$. Alors $x_n \geq \ell + \alpha$ pour $n \geq N + 1$ et on ne peut avoir la propriété donnée en indication en remplaçant α par $\alpha/2$ (qui est pourtant un réel strictement positif). On a donc une absurdité.

(b) Montrer que $(x_0, \ldots, x_N)$ est une subdivision de $[0, 1]$.

Par les choix ci-dessus, on a $x_0 = 0$ et $x_N = 1$. De plus, on a déjà montré que $x_0 < x_1 < x_2 \ldots < x_{N-2} < x_{N-1} < x_N$ (quitte à poser N le premier rang tel que $x_N = 1$).

(3) On pose dans cette question :

$$u = \min\left(f, \sum_{k=0}^{N-1} \min\{f(\sigma), \sigma \in [x_k, x_{k+1}]\}\mathbf{1}_{[x_k, x_{k+1}]}\right)$$

$$U = \max\left(f, \sum_{k=0}^{N-1} \max\{f(\sigma), \sigma \in [x_k, x_{k+1}]\}\mathbf{1}_{[x_k, x_{k+1}]}\right).$$

(a) Montrer que u et U sont en escalier

On montre que $x_0, \ldots, x_N$ est adaptée pour la fonction u. Par un calcul similaire, on montrer que $x_0, \ldots, x_N$ est adaptée pour la fonction U. Pour tout $i \in \{0, \ldots, N - 1\}$ et $t \in]x_i, x_{i+1}[$ on a

$$\sum_{k=0}^{N-1} \min\{f(\sigma), \sigma \in [x_k, x_{k+1}]\}\mathbf{1}_{[x_k, x_{k+1}]} = \min\{f(\sigma), \sigma \in [x_i, x_{i+1}]\} \leq f(t).$$

Donc

$$u(t) = \min\{f(\sigma), \sigma \in [x_i, x_{i+1}]\}$$

ce qui est bien constant sur $]x_i, x_{i+1})[$.

(b) Montrer que $u \leq f \leq U$

Par définition, du min, on a $u(t) \leq f(t)$ pour $t \in [0,1]$. De même, par définition, du max, on a $U(t) \geq f(t)$ pour $t \in [0,1]$.

(c) Montrer que
$$\int_0^1 (U(t) - u(t))\mathrm{d}t \leq \varepsilon.$$

Par la relation de Chasles, on a :
$$\int_0^1 (U(t) - u(t))\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (U(t) - u(t))\mathrm{d}t.$$
Or, pour tout $t \in]x_i, x_{i+1}[$ on a déjà vu que
$$u(t) = \min\{f(\sigma), \sigma \in [x_i, x_{i+1}]\}$$
et on a de même :
$$U(t) = \max\{f(\sigma), \sigma \in [x_i, x_{i+1}]\}.$$
Ainsi :
$$\int_0^1 (U(t) - u(t))\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{N-1} (\max\{f(\sigma), \sigma \in [x_i, x_{i+1}]\} - \min\{f(\sigma), \sigma \in [x_i, x_{i+1}]\})(x_{i+1} - x_i)$$
Or, par choix de la subdivition (cf question 1.b) :
$$\max\{f(\sigma), \sigma \in [x_i, x_{i+1}]\} - \min\{f(\sigma), \sigma \in [x_i, x_{i+1}]\}) \leq \varepsilon \quad \forall i = 0, \dots, N-1.$$
Par conséquent, en ajoutant ces inégalités multipliées par $(x_{i+1} - x_i) > 0$, on obtient :
$$\begin{aligned}\int_0^1 (U(t) - u(t))\mathrm{d}t &\leq \varepsilon \sum_{k=0}^{N-1} (x_{i+1} - x_i) \\ &\leq \varepsilon(1 - 0) = \varepsilon.\end{aligned}$$