Exercice 1. Dans $\mathbb{R}^5$ on note

$$F = \{(x, y, z, t, u) \in \mathbb{R}^5 \text{ t.q. } x + y - 2z = 3z + 2t - u = x + y + z + t + u = 0\}$$
$$G = \mathrm{Vect}((1, 1, -2, 0, 0), (0, 0, 3, 2, -1), (1, 1, 1, 1, 1))$$

(1) Justifier que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$ et en construire une base.

On reconnaît que $F = \operatorname{Ker} A$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

C'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$. On obtient une représentation paramétrique de F en résolvant ce système par application de l'algorithme de Gauss. Il vient

$$F = \{(-y - 2u, y, -u, 2u, u), \quad (y, u) \in \mathbb{R}^2\} = \langle(-1, 1, 0, 0, 0), (-2, 0, -1, 2, 1)\rangle$$

De plus, on vérifie que $((-1, 1, 0, 0, 0), (-2, 0, -1, 2, 1))$ forme une famille libre car leur deuxième et troisième composante sont alternativement nulle et non nulle. Par conséquent, cette famille est une base de F (qui est donc de dimension 2).

(2) Justifier que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$ et calculer sa dimension.

G est l'espace vectoriel engendré par la famille $((1, 1, -2, 0, 0), (0, 0, 3, 2, -1), (1, 1, 1, 1, 1))$ c'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$. Pour calculer sa dimension, on vérifie que cette famille (qui est génératrice par définition de G) est libre. Supposons donc que, pour $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ on a :

$$\alpha(1, 1, -2, 0, 0) + \beta(0, 0, 3, 2, -1) + \gamma(1, 1, 1, 1, 1) = (0, 0, 0, 0, 0).$$

On obtient donc le système

$$\begin{cases} \alpha + \gamma & = & 0 \\ -2\alpha + 3\beta + \gamma & = & 0 \\ 2\beta + \gamma & = & 0 \\ -\beta + \gamma & = & 0 \end{cases}$$

En combinant les deux dernières équations, on obtient que $\beta = \gamma = 0$ et, par suite, $\alpha = 0$. La famille $((1, 1, -2, 0, 0), (0, 0, 3, 2, -1), (1, 1, 1, 1, 1))$ est donc libre et base de G qui est donc de dimension 3.

(3) Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^5$.

Puisque F et G ont des dimensions dont la somme est égale à la dimension de $\mathbb{R}^5$, il suffit de vérifier qu'ils sont en somme directe pour obtenir qu'ils sont supplémentaires. Supposons $(x, y, z, y, t, u) \in F \cap G$. Puirsque $(x, y, z, t, u) \in G$ on peut écrire

$$(x, y, z, y, t, u) = \alpha(1, 1, -2, 0, 0) + \beta(0, 0, 3, 2, -1) + \gamma(1, 1, 1, 1, 1).$$

Puisque $(x, y, z, y, t, u) \in F$ on a également :

$$x + y - 2z(= 6\alpha - 6\beta) = 0 \quad 3z + 2t - u(= -6\alpha + 14\beta + 4\gamma) = 0 \quad x + y + z + t + u(= 4\beta + 5\gamma) = 0$$

On trouve donc le système en α, β, γ de matrice de coefficients :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -3 & 7 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Le déterminant de cette matrice vaut $35 - 8 - 15 = 12 \neq 0$ donc le noyau de cette matrice ne contient que le vecteur nul. Ceci implique que $\alpha = \beta = \gamma = 0$ et donc que (x, y, z, t, u) est le vecteur nul. Ceci termine la démonstration.

Exercice 2. Pour cet exercice, on rappelle que pour toute matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ on note $A^\top = (a'_{i,j}) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice telle que :

$$a'_{i,j} = a_{j,i} \quad \forall\,(i,j) \in \{1,2,3\}^2$$

On s'intéresse dans cet exercice aux propriétés de l'ensemble

$$F = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \text{ t.q. } M = -M^\top\}.$$

et de ses éléments.

(1) Dans cette question, on considère l'application

$$\phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & \dfrac{M - M^\top}{2} \end{array}$$

(a) Montrer que ϕ est linéaire et que $F = \mathrm{Im}(\phi)$

(b) En déduire que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ainsi qu'une base de F

(a) On vérifé les stabilités. Soit M_1, M_2 deux matrices et $\lambda \in \mathbb{R}$. On remarque tout d'abord que $(M_1 + \lambda M_2)^\top = M_1^\top + \lambda M_2^\top$. Ceci implique que

$$\begin{aligned} \phi(M_1 + \lambda M_2) &= \frac{(M_1 + \lambda M_2) - (M_1 + \lambda M_2)^\top}{2} \\ &= \frac{M_1 + \lambda M_2 - M_1^\top - \lambda M_2^\top}{2} \\ &= \frac{M_1 - M_1^\top}{2} + \lambda \frac{M_2 - M_2^\top}{2} \\ &= \phi(M_1) + \lambda \phi(M_2). \end{aligned}$$

Donc ϕ est linéaire.

On montre l'identité $F = \mathrm{Im}\,\phi$ par double inclusion. On remarque d'abord que si on calcule $[M^\top]^\top$ on échange tour à tour indice de ligne et indice de colonne. Donc $[M^\top]^\top = M$. Ainsi, si $A = \phi(M)$ alors

$$A = \frac{M - M^\top}{2} \text{ donc } A^\top = \frac{M^\top - [M^\top]^\top}{2} = \frac{M^\top - M}{2} = -A.$$

Par conséquent $\mathrm{Im}\,\phi \subset F$. Réciproquement, si $A \in F$ alors on remarque que

$$\frac{A - A^\top}{2} = \frac{A + A}{2} = A$$

Donc $A = \phi(A) \in \mathrm{Im}\,\phi$. On a donc $F \subset \mathrm{Im}\,\phi$.

(b) F est l'image d'une application linéaire à valeurs dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donc est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. De plus, une base de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices $(E_{i,j})_{1 \le i,j \le 3}$ qui n'ont qu'un seul coefficient non-nul (à l'intersection de la i-ième ligne et la j-ième colonne) et tous les autres nuls. Par conséquent, on a que

$$\mathrm{Im}\,\phi = \langle \phi(E_{i,j})_{1 \le i,j \le 3} \rangle.$$

En enlevant les doublons et les matrices nulles, on trouve que cette famille se ramène aux trois matrices :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De plus, ces matrices ont des coefficients non nuls sur des intersections de lignes et de colonnes différentes. C'est donc une famille libre. Par conséquent, c'est une base de F.

(2) Dans cette question on considère $M \in F$

(a) Montrer qu'il existe $(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Etant donné $X \in \mathbb{R}^3$ de composantes (x_1, x_2, x_3), comparer MX et le produit vectoriel de X avec le vecteur ω de coordonnées $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$.

(1) Puisque (A_1, A_2, A_3) est une base de F toute matrice de F s'exprime sous la forme $\omega_1 A_1 + \omega_2 A_2 + \omega_3 A_3$ ce qui est la forme voulue.

(2) On fait le produit matriciel et le produit vectoriel et on observe qu'on obtient la même formule.

Exercice 3. Dans cet exercice on note P_1 l'ensemble des fonctions f telles que :
- $f \in C([0,1])$
- il existe $(a_-, b_-) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x) = a_- x + b_-$ pour $x \in [0, 1/2]$
- il existe $(a_+, b_+) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x) = a_+ x + b_+$ pour $x \in [1/2, 1]$

(1) Montrer que P_1, muni des opérations usuelles sur les fonctions, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

On note que P_1 est un sous-espace de $C([0,1])$ il suffit donc de vérifier que l'espace est non vide ainsi que les stabilités par somme et dilatation pour montrer que c'est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Tout d'abord, le vecteur nul s'exprime sous la forme voulue avec $a_- = b_- = a_+ = b_+ = 0$. Ensuite, soit f et ϕ dans P_1 et $\lambda \in \mathbb{R}$. On dispose donce de (a_-, b_-) et (a_+, b_+) pour calculer f sur $[0, 1/2]$ et $[1/2, 1]$ ains que de (α_-, β_-) et (α_+, β_+) pour calculer ϕ sur $[0, 1/2]$ et $[1/2, 1]$. Par combinaison on a donc que

$$[f + \lambda\phi](x) = (a_- + \lambda\alpha_-) + (b_- + \lambda\beta_-)x \quad \text{pour } x \in [0, 1/2]$$

et

$$[f + \lambda\phi](x) = (a_+ + \lambda\alpha_+) + (b_+ + \lambda\beta_+)x \quad \text{pour } x \in [1/2, 1]$$

Ainsi $f + \lambda\phi$ satisfait la condition voulue avec $a'_- = a_- + \lambda\alpha_-$, $b'_- = b_- + \lambda\beta_-$, $a'_+ = a_+ + \lambda\alpha_+$ et $b'_+ = b_+ + \lambda\beta_+$.

(2) Construire une fonction $\pi_- \in P_1$ tel que

$$\pi_-(0) = 1 \quad \pi_-(1/2) = 0 \quad \pi_-(1) = 0$$

Soit π_0 une telle fonction, on lui associe (a_-, b_-) et (a_+, b_+) qui permettent de calculer ses valeurs sur $[0, 1/2]$ et $[1/2, 1]$ respectivement. En écrivant la valeur en 0 (resp. en 1) on trouve que $b_- = 1$ (resp. que $a_+ + b_+ = 0$). En écrivant la valeur en 1/2 on trouve que $a_-/2 + b_- = 0$ et que $a_+/2 + b_+ = 0$. Ceci nous fournit un système en (a_+, b_+) et un système en (a_-, b_-) qu'on résoud pour trouver finalement que

$$\pi_-(x) = \begin{cases} 1 - 2x & \text{si } x \in [0, 1/2] \\ 0 & \text{si } x \in [1/2, 1] \end{cases}$$

(3) On pose $\pi_+(x) = \pi_-(1-x)$. Montrer que $\pi_+ \in P_1$ et calculer $\pi_+(0), \pi_+(1/2), \pi_+(1)$.

A l'aide de la formule ci-dessus, on trouve

$$\pi_+(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1/2] \\ 2x - 1 & \text{si } x \in [1/2, 1] \end{cases}$$

En particulier, π_+ est de la forme voulue avec $(a_-, b_-) = 0, 0$ et $(a_+, b_+) = (2, -1)$. De plus $\pi_+(0) = \pi_+(1/2) = 0$ et $\pi_+(1) = 1$.

(4) Construire π_0 tel que $\pi_0(0) = \pi_0(1) = 0$ et $\pi_0(1/2) = 1$.

A nouveau on notre (a_-, b_-) et (a_+, b_+) les coefficients qui permettent de calculer π_0 sur $[0, 1/2]$ et sur $[1/2, 1]$. Comme à la question (4), on écrit les systèmes satisfaits par ces inconnus en écrivant les valeurs pour π_0 en $x = 0, x = 1/2$ et $x = 1$. Cela donne

$$\begin{cases} b_- &= 0 \\ a_-/2 + b_- &= 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_+/2 + b_+ &= 1 \\ a_+ + b_+ &= 0 \end{cases}$$

Après résolution, ceci-donne :

$$\pi_0(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0, 1/2] \\ 2 - 2x & \text{si } x \in [1/2, 1] \end{cases}$$

(5) Montrer que (π_0, π_-, π_+) est une base de P_1 puis calculer la dimension de P_1.

Montrons que cette famille est libre. Supposons que $(\alpha_0, \alpha_-, \alpha_+)$ satisfait $\alpha_0\pi_0 + \alpha_-\pi_- + \alpha_+\pi_+ = 0$. On peut alors évaluer cette identité

- en $x = 0$ ce qui donne $\alpha_- = 0$
- en $x = 1/2$ ce qui donne $\alpha_0 = 0$
- en $x = 1$ ce qui donne $\alpha_+ = 0$

Cette famille est donc bien libre.

Montrer que cette famille est génératrice. Soit $f \in P_1$. Montrons d'abord que f est complètement fixé par ses valeurs en $0, 1/2$ et 1. en effet, puisque f est affine sur $[0, 1/2]$ on a en particulier

$$f(x) = f(0) + 2(f(1/2) - f(0))x = f(0)(1 - 2x) + f(1/2)2x \quad [0,1/2]$$

et, puisque f est affine sur $[1/2, 1]$ on a

$$f(x) = f(1) + 2(f(1/2) - f(1))(1 - x) = f(1)(2x - 1) + f(1/2)2(1 - x)$$

Par conséquent, $f = f(0)\pi_- + f(1/2)\pi_0 + f(1)\pi_+$.

En conclusion, (π_0, π_-, π_+) est bien une base de P_1 et P_1 est de dimension 3.

(6) Montrer que, pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, il existe un unique $\pi \in P_1$ tel que $\pi(0) = a$, $\pi(1/2) = b$ et $\pi(1) = c$.

D'après les calculs réalisés à la question précédente, la décomposition est unique et le candidat

$$\pi = a\pi_- + b\pi_0 + c\pi_+$$

satisfait les conditions voulues.

Exercice 4. Calculer les déterminants suivants :.

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_2(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 1 \\ -1 & \lambda & 0 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda & 2 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda \end{pmatrix} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

On trouve $\Delta = 8$ et $\Delta_2(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^2 - \lambda + 1$.