DE3 - HLMA206 - 2018/2019

Intégration – Développements limités

Exercice 1. Soit f la fonction définie par

$$f(x) = 1 + 2\arctan(x) + 2(\sin(x))^2 - \exp(2x)$$

Pour quelles puissances $k \in \mathbb{N}$ a-t-on $f(x) = o(x^k)$ en 0.

On sait que la dérivée d'arctangente est la fonction $x \to 1/(1+x^2)$ donc le D.L. à l'ordre 3 d'arctangente en l'origine est la primitive de celui d'ordre 2 de $x \to 1/(1+x^2)$ c'est-à-dire :

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

On connait le D.L. à l'ordre 3 de $x \to \sin(x)$ donc on a

$$2(\sin(x))^2 = 2(x - x^3/6)^2 + o(x^3) = 2x^2 + o(x^3).$$

En combinant avec le D.L de $\exp(x)$ on obient :

$$f(x) = 1 + 2x + 2x^2 - 2\frac{x^3}{3} + o(x^2) - (1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{6}) + o(x^3) = -2x^3 + o(x^3).$$

On a donc $f(x) = -2x^3 + o(x^3)$. Par conséquent, on a $f(x) = o(x^k)$ pour $k = 0, 1, 2$.

Exercice 2. Déterminer et positionner par rapport au graphe l'asymptote oblique de la fonction $f(x) = ((x^2+1)(x+1)^2)^{1/4}$ en $+\infty$.

On remarque que $f(x)$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ (en particulier car on prend une racine quatrième d'un nombre positif quelque soit x). La fonction f est donc bien définie sur $\mathbb{R}$ et donc pour x grand. De plus, par multiplicativité de la racine quatrième, on a :

$$f(x) = x\left(\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\left(1 + \frac{1}{x}\right)^2\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Posons

$$g(h) = \left(\left(1 + h^2\right)(1+h)^2\right)^{\frac{1}{4}}.$$

si bien que $f(x) = g(1/x)$. A nouveau, g est définie sur $\mathbb{R}$ et on veut étudier son comportement en 0. En 0, en utilisant le D.L. à l'ordre 2 de $s \to (1+s)^{1/4}$ on obtient :

$$\begin{aligned}
g(h) &= \left((1+h^2)(1+2h+h^2)\right)^{1/4} = (1 + 2h + 2h^2 + o(h^2))^{\frac{1}{7}4} \\
&= 1 + \frac{1}{4}(2h + 2h^2) - \frac{3}{32}(2h+2h^2)^2 + o(h^2) \\
&= 1 + \frac{h}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{8}\right)h^2 + o(h^2) \\
&= 1 + \frac{h}{2} + \frac{1}{8}h^2 + o(h^2)
\end{aligned}$$

Par substitution, on obtient donc que :

$$\begin{aligned} f(x) &= x\left(1 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{8x^2} + \frac{1}{x^2}\varepsilon(x)\right) \\ &= x + \frac{1}{2} + \frac{1}{x}\left(\frac{1}{8} + \varepsilon(x)\right) \end{aligned}$$

avec $\varepsilon(x) \to 0$ quand $x \to \infty$. En $+\infty$ le graphe de f admet donc pour asymptote oblique la droite d'équation $y = d(x) = x + 1/2$ la différence $f(x) - d(x)$ est du signe de $1/8x$ pour x grand ce qui implique que la graphe de f est au-dessus de l'asymptote.

Exercice 3. Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\sin(x)}\mathrm{d}t \quad I_2 = \int_0^1 \frac{x\mathrm{dx}}{x^2 - 2x - 3}$$

Pour I_1 on utilise le changement de variable $x = \tan(t/2)$ et on obtient que

$$I_1 = \int_0^1 \frac{2}{(1+t)^2}\mathrm{d}t = 1.$$

Pour I_2, on reconnaît que le dénominateur se factorise sous la forme :

$$x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4 = (x-3)(x+1)$$

Par conséquent, le dénominateur ne s'annule pas sur $[0, 1]$. En écrivant de plus que

$$x = \frac{(x-3) + 3(x+1)}{4}$$

on obtient que

$$I_2 = \ln(2) - \frac{3}{4}\ln(3).$$

Exercice 4. Soit

$$E = \{\phi \in C([0,1]) \text{ t.q. } \phi \in C^2(]0,1/2[) \cap C^2(]1/2,1[)\}.$$

(1) Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

Il s'agit de montrer que E est un sous-espace vectoriel de $C([0,1])$. La fonction nulle est bien dans E. De plus, si f et g sont dans E alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a que, les restrictions de f et g à $]0,1/2[$ et $]1/2,1[$ étant C^2 la restriction de la somme $f + \lambda g$ (qui est la somme des restrictions) l'est également. On a donc bien que $f + \lambda g \in E$.

(2) Montrer que l'application

$$\begin{array}{rccc} D_2 : & E & \longrightarrow & \mathcal{F}(]0,1[\setminus\{1/2\};\mathbb{R}) \\ & f & \longmapsto & f" \end{array}$$

est bien définie et linéaire.

Par définition, pour tout $f \in E$ on a que la restriction de f à $]0,1/2[$ et $]1/2,1[$ est C^2. Par conséquent, on peut calculer la dérivée seconde de la restriction de f à ces deux intervalle c'est-à-dire $D_2[f]$. L'application est donc bien définie.

De plus, pour tout $(f,g) \in C^2(]0,1/2[)$et $\lambda \in \mathbb{R}$ posant $h = f + \lambda g$ on sait que $h" = f" + \lambda g"$. Il en est de même sur $]1/2,1[$. On a donc que pour tout $(f,g) \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in]0,1/2[\cup]1/2,1[$:

$$D_2[f + \lambda g](x) = f"(x) + \lambda g"(x) = D_2[f](x) + \lambda D_2[g](x).$$

Ceci montre que $D_2[f + \lambda g] = D_2[f] + \lambda D_2[g]$ et donc que D_2 est linéaire.

(2) Montrer que $\operatorname{Ker} D_2$ est de dimension finie et préciser sa dimension.

Soit $f \in \operatorname{Ker} D_2$ on donc que $f \in C^2(]0,1/2[)$ satisfait $f" = 0$. Par conséquent, il existe $a_- \in \mathbb{R}$ tel que $f'(x) = a_-$ et en intégrant à nouveau, il existe $b_- \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = a_- x + b_-$ pour tout $x \in]0,1/2[$. De même, on obtient qu'il existe $(a_+, b_+) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(x) = a_+ x + b_+$ sur $]1/2,1[$. Puisque f est continue sur $[0,1]$ on peut prolonger ces identités par continuité sur les bords des intervalles ouverts. Donc

$$\begin{aligned} f(x) &= a_- x + b_- \quad \forall\, x \in [0,1/2] \\ f(x) &= a_+ x + b_+ \quad \forall\, x \in [1/2,1]. \end{aligned}$$

On a donc en particulier

$$\frac{a_-}{2} + b_- = \frac{a_+}{2} + b_+ \Longrightarrow b_+ = b_- + \frac{1}{2}(a_- - a_+).$$

et

$$\begin{aligned} f(x) &= a_- x + b_- && \forall\, x \in [0,1/2] \\ f(x) &= a_+(x - 1/2) + a_-/2 + b_- && \forall\, x \in [1/2,1]. \end{aligned}$$

Autrement dit, on peut écrire $f = b_- f_1 + a_- f_2 + a_+ f_3$ avec f_1, f_2, f_3 trois fonctions de E définies ponctuellement par :

$$f_1(x) = 1, \quad f_2(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \le 1/2 \\ 1/2 & \text{si } x > 1/2 \end{cases}, \quad f_3(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \le 1/2 \\ (x - 1/2) & \text{si } x > 1/2 \end{cases}.$$

Par conséquent, (f_1, f_2, f_3) est une famille libre de $\operatorname{Ker} D_2$. Vérifions qu'elle est libre. Si $a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3 = 0$ alors

- en évaluant en 0 on trouve que $a_1 = 0$,
- en évaluant en $1/2$ on trouve que $a_2 = 0$,
- en évaluant en 1 on trouve que $a_3 = 0$.

Finalement (f_1, f_2, f_3) est une base de $\operatorname{Ker} D_2$ et donc

$$\dim(\operatorname{Ker} D_2) = 3.$$