Université de Montpellier - Faculté des Sciences

Année Universitaire 2017-2018

HLMA206 : Devoir Encadré 3

—

Corrigé

Ce document propose **une** correction des exercices du devoir encadré.

Exercice 1. Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x \ln x} & \text{si } x \neq 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

1. Les applications identité, ln et $x \mapsto x^2 - 1$ sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$. Par ailleurs, l'application $x \mapsto x \ln x$ ne s'annule que pour $x = 1$, donc f est continue sur $]0, +\infty[\setminus\{1\}$ comme produit et quotient de fonctions continues.

   En 1, on a $\ln x = \ln(1 + (x-1)) \sim_1 x - 1$ car $\ln(1+y) \sim_0 y$ et $\lim_{x\to 1}(x-1) = 0$. On a donc
   $$f(x) \sim_1 \frac{x^2-1}{x(x-1)} = \frac{x+1}{x}$$
   et $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x+1}{x} = 2 = f(1)$. Donc f est continue en 1.

   On a $\lim_{x\to 0}(x \ln x) = 0$, et comme $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $\ln x < 0$ au voisinage de 0, on a $\lim_{x\to 0}(x \ln x) = 0$ par valeurs négatives. Par ailleurs, $\lim_{x\to 0}(x^2 - 1) = -1 < 0$. On a donc $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

   En $+\infty$ on a $x^2 - 1 \sim_{+\infty} x^2$ et $f(x) \sim_{+\infty} \frac{x^2}{x \ln x} = \frac{x}{\ln x}$. Comme $\ln x = o(x)$ en $+\infty$ on a $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. Comme $x > 0$ et $\ln x > 0$ au voisinage de $+\infty$, on obtient $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2. On s'intéresse à la dérivabilité de f.

   (a) Le DL à l'ordre 3 en 0 de $\ln(1+y)$ est
   $$\ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + o(y^3).$$
   On a donc
   $$\begin{aligned} (1+y)\ln(1+y) &= \ln(1+y) + y\ln(1+y) \\ &= y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + o(y^3) + y^2 - \frac{y^3}{2} + \frac{y^4}{3} + o(y^4) \\ &= y + \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{6} + o(y^3) \end{aligned}$$
   qui est le DL à l'ordre 3 en 0 de $(1+y)\ln(1+y)$. On obtient donc
   $$\begin{aligned} y(y+2) - 2(1+y)\ln(1+y) &= y^2 + 2y - 2\big(y + \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{6} + o(y^3)\big) \\ &= y^2 + 2y - 2y - y^2 + \frac{y^3}{3} + o(y^3) \\ &= \frac{y^3}{3} + o(y^3) \\ &\sim_0 \frac{y^3}{3} \end{aligned}$$

(b) On calcule le taux d'accroissement de f en 1 :

$$\begin{aligned}\frac{f(1+y)-f(1)}{y} &= \frac{1}{y}\Big(\frac{(1+y)^2-1}{(1+y)\ln(1+y)}-2\Big)\\ &= \frac{y(y+2)-2(1+y)\ln(1+y)}{y(1+y)\ln(1+y)}\end{aligned}$$

Comme $1+y\sim_0 1$ et $\ln(1+y)\sim_0 y$, le calcul de la question précédente donne

$$\frac{f(1+y)-f(1)}{y}\sim_0 \frac{y^3}{3y^2}=\frac{y}{3}$$

et $\lim\limits_{y\to 0}\frac{f(1+y)-f(1)}{y}=0$. Donc f est dérivable en 1 et $f'(1)=0$.

Exercice 2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $u_n=o(n)$ en $+\infty$.

1. Comme $u_n=o(n)$, on a $n+u_n=n+o(n)\sim_{+\infty} n$ et $n-u_n=n+o(n)\sim_{+\infty} n$. On a donc

$$\frac{n+u_n}{n-u_n}\sim_{+\infty}\frac{n}{n}=1$$

et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n+u_n}{n-u_n}=1$. Par composition des limites on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\Big(\frac{n+u_n}{n-u_n}\Big)=0$.

2. On a

$$\ln\Big(\frac{n+u_n}{n-u_n}\Big)=\ln\Big(\frac{n-u_n+2u_n}{n-u_n}\Big)=\ln\Big(1+\frac{2u_n}{n-u_n}\Big).$$

Comme $n-u_n\sim_{+\infty} n$, on a $\frac{2u_n}{n-u_n}\sim_{+\infty}\frac{2u_n}{n}$, et comme $u_n=o(n)$ on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2u_n}{n-u_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2u_n}{n}=0$. Comme par ailleurs, $\ln(1+x)\sim_0 x$, on a

$$\ln\Big(\frac{n+u_n}{n-u_n}\Big)=\ln\Big(1+\frac{2u_n}{n-u_n}\Big)\sim_{+\infty}\frac{2u_n}{n-u_n}\sim_{+\infty}\frac{2u_n}{n}.$$

En posant $u_n=-\sqrt{n}$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_n}{n}=0$, donc $u_n=o(n)$. Par ce qui précède, on obtient

$$\ln\Big(\frac{n-\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}}\Big)=\ln\Big(\frac{n+u_n}{n-u_n}\Big)\sim_{+\infty}\frac{2u_n}{n}=-\frac{2}{\sqrt{n}}.$$

On en déduit que $\sqrt{n}\ln\Big(\frac{n-\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}}\Big)\sim_{+\infty}-\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n}}=-2$ et

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}\ln\Big(\frac{n-\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}}\Big)=-2.$$

Exercice 3. Calculer les développements limités suivant :

1. $\frac{x\mathrm{e}^{-x}}{1+x}$ en 0 à l'ordre 3.

Le DL de e^y en 0 à l'ordre 2 donne $\mathrm{e}^y=1+y+\frac{y^2}{2}+o(y^2)$, d'où

$$\mathrm{e}^{-x}=1-x+\frac{(-x)^2}{2}+o((-x)^2)=1-x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)$$

et

$$x\mathrm{e}^{-x}=x\big(1-x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\big)=x-x^2+\frac{x^3}{2}+o(x^3)$$

qui est le DL à l'ordre 3 de $x\mathrm{e}^{-x}$. Par ailleurs, le DL à l'ordre 3 de $\frac{1}{1+x}$ est

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+o(x^3).$$

En faisant le produit des DL on obtient le DL en 0 à l'ordre 3 de $\frac{xe^{-x}}{1+x}$:

$$\begin{aligned}
\frac{xe^{-x}}{1+x} &= (x - x^2 + \frac{x^3}{2})(1 - x + x^2 - x^3) + o(x^3) \\
&= x - x^2 + x^3 - x^2 + x^3 + \frac{x^3}{2} + o(x^3) \\
&= x - 2x^2 + \frac{5}{2}x^3 + o(x^3)
\end{aligned}$$

2. $\ln(\cos x)$ en 0 à l'ordre 4.

Le DL en 0 à l'ordre 4 de $\ln(1+y)$ est

$$\ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + o(y^4).$$

Comme $\ln(\cos x) = \ln(1 + (\cos x - 1))$ et $\lim_{x\to 0}(\cos x - 1) = 0$ on peut composer les DL. Le DL en 0 à l'ordre 4 de $\cos x - 1$ est

$$\cos x - 1 = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4),$$

d'où

$$\begin{aligned}
\ln(\cos x) &= \Big(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\Big) - \frac{1}{2}\Big(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\Big)^2 + \frac{1}{3}\Big(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\Big)^3 - \frac{1}{4}\Big(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\Big)^4 + o(x^4) \\
&= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^4}{8} + o(x^4) \\
&= -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)
\end{aligned}$$

3. $e^{\sqrt{x}}$ en 1 à l'ordre 3.

On connaît le DL de e^y en 0, mais $\lim_{x\to 1}\sqrt{x} = 1$. On écrit donc

$$e^{\sqrt{x}} = e^{1+\sqrt{x}-1} = e.e^{\sqrt{x}-1}$$

et on calcule de DL en 1 à l'ordre 3 de $\sqrt{x} - 1$. On pose $y = x - 1$ et on écrit le DL en 0 à l'ordre 3 de $\sqrt{1+y} - 1$:

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+y} - 1 &= (1+y)^{\frac{1}{2}} - 1 \\
&= \frac{1}{2}y - \frac{1}{8}y^2 + \frac{1}{16}y^3 + o(y^3).
\end{aligned}$$

Comme $e^u = 1 + u + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{6}u^3 + o(u^3)$ et $\lim_{y\to 0}(\sqrt{1+y} - 1) = 0$, on peut composer les DL et on obtient

$$\begin{aligned}
e^{\sqrt{1+y}-1} &= 1 + \Big(\frac{1}{2}y - \frac{1}{8}y^2 + \frac{1}{16}y^3\Big) + \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2}y - \frac{1}{8}y^2 + \frac{1}{16}y^3\Big)^2 + \frac{1}{6}\Big(\frac{1}{2}y - \frac{1}{8}y^2 + \frac{1}{16}y^3\Big)^3 + o(y^3) \\
&= 1 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{8}y^2 + \frac{1}{16}y^3 + \frac{1}{8}y^2 - \frac{1}{16}y^3 + \frac{1}{48}y^3 + o(y^3) \\
&= 1 + \frac{1}{2}y + \frac{1}{48}y^3 + o(y^3)
\end{aligned}$$

Comme $y = x - 1$ on a

$$e^{\sqrt{x}-1} = 1 + \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{48}(x-1)^3 + o((x-1)^3)$$

et

$$e^{\sqrt{x}} = e.e^{\sqrt{x}-1} = e + \frac{e}{2}(x-1) + \frac{e}{48}(x-1)^3 + o((x-1)^3)$$

qui est le DL en 1 à l'ordre 3 de $e^{\sqrt{x}}$.