Université de Montpellier - Faculté des Sciences

Année Universitaire 2017-2018

HLMA206 : Devoir Encadré 2

Vendredi 16 mars 2018

La rédaction est une part importante du travail : toutes les affirmations doivent être justifiées, les raisonnements et les calculs présentés de façon claire.

Exercice 1. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $\mathcal{F} = (u_1, u_2, u_3)$ la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ où $u_1 = (1, 1, 2)$, $u_2 = (1, a, 2)$ et $u_3 = (1, a, a + 2)$. On note $E = \text{vect}(u_1, u_2)$ et $F = \text{vect}(u_3)$.

1. Déterminer les valeurs du paramètre a pour lesquelles $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Dans les cas où $\mathcal{F}$ n'est pas une base, déterminer les dimensions de E, F, $E + F$ et $E \cap F$.
3. Dans ce qui suit, on suppose que $\mathcal{F}$ est une base. Montrer que E et F sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
4. Donner la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{F}$. Si $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, donner ses coordonnées dans la base $\mathcal{F}$.

Exercice 2. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $\ker(f)$ est de dimension 1 et déterminer un vecteur u qui l'engendre.
2. Soient $v = (1, -2, 1)$ et $w = (2, -1, 1)$. Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice de f dans cette base.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f^{2n+1} = f$.

Exercice 3. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$. Un scalaire λ est une valeur propre de f s'il existe un vecteur $u \neq 0$ tel que $f(u) = \lambda u$.

1. Montrer que λ est une valeur propre de f si et seulement si $\ker(f - \lambda \text{id}) \neq \{0\}$, où id est l'application identité de $\mathbb{K}^n$.
2. Soit A la matrice de f dans une base $\mathcal{B}$. Montrer que λ est valeur propre de f si et seulement si $\det(A - \lambda I) = 0$.
3. On suppose que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, que λ et μ sont des valeurs propres telles que $\lambda \neq \mu$. Soient $u \neq 0$ et $v \neq 0$ tels que $f(u) = \lambda u$ et $f(v) = \mu v$.

   Montrer que (u, v) est une base de $\mathbb{R}^2$ et donner la matrice de f dans cette base.