HLMA206 : Devoir Encadré 2

–

Corrigé

Ce document propose **une** correction des exercices du devoir encadré.

Exercice 1. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $\mathcal{F} = (u_1, u_2, u_3)$ la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ où $u_1 = (1, 1, 2)$, $u_2 = (1, a, 2)$ et $u_3 = (1, a, a + 2)$. On note $E = \mathrm{vect}(u_1, u_2)$ et $F = \mathrm{vect}(u_3)$.

1. On cherche les valeurs du paramètre a telles que $\det_{\mathcal{C}}(u_1, u_2, u_3) \neq 0$. Le calcul donne

$$\det_{\mathcal{C}}(u_1, u_2, u_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a \\ 2 & 2 & a+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 2 & 2 & a \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a(a-1)$$

où on a soustrait la seconde colonne à la troisième, puis développé suivant la troisième colonne.

On a donc $\det_{\mathcal{C}}(u_1, u_2, u_3) = 0$ si et seulement si $a \in \{0, 1\}$, et $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ si $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

2. **Premier cas: $a = 0$.**

Comme $u_1 = (1, 1, 2)$ et $u_2 = (1, 0, 2)$ sont non colinéaires, la famille (u_1, u_2) est libre et $\dim(E) = 2$.

Comme $u_3 = (1, 0, 2)$ est non nul, on a $\dim(F) = 1$.

Par ailleurs, $u_3 = u_2 \in E$, donc $F = \mathrm{vect}(u_3) \subset E$ et $E \cap F = F$. D'où $\dim(E \cap F) = 1$ et $\dim(E + F) = \dim(E) + \dim(F) - \dim(E \cap F) = 2$.

Deuxième cas: $a = 1$.

Comme $u_2 = (1, 1, 2) = u_1$, on a $E = \mathrm{vect}(u_1)$ et $\dim(E) = 1$ car $u_1 \neq 0$.

Par ailleurs, $u_3 = (1, 1, 3) \neq 0$, donc $\dim(F) = 1$.

On a alors $E + F = \mathrm{vect}(u_1, u_3)$ et $\dim(E + F) = 2$ car u_1 et u_3 sont non colinéaires.

On a finalement $\dim(E \cap F) = \dim(E) + \dim(F) - \dim(E + F) = 0$.

3. On a $E+F = \mathrm{vect}(u_1, u_2, u_3)$. Comme $\mathcal{F}$ est une base, elle est génératrice et $E+F = \mathrm{vect}(u_1, u_2, u_3) = \mathbb{R}^3$.

Par ailleurs, la famille $\mathcal{F}$ étant libre, la sous-famille (u_1, u_2) est aussi libre et $\dim(E) = 2$.

Comme $u_3 \neq 0$, on a $\dim(F) = 1$.

Finalement on obtient $\dim(E \cap F) = \dim(E) + \dim(F) - \dim(E + F) = 0$, donc $E \cap F = \{0\}$ et la somme est directe.

4. Soit P la matrice de passage de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{F}$. Les coordonnées de v dans la base $\mathcal{F}$ sont données par $P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. On calcule P^{-1} par un algorithme de Gauss-Jordan. Comme on a supposé que $\mathcal{F}$ est

une base, on a $a \neq 0$ et $a-1 \neq 0$, et on peut diviser par a et $a-1$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & a & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & a+2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & a-1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_3 \leftarrow \frac{1}{a} L_3]{L_2 \leftarrow \frac{1}{a-1} L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{-1}{a-1} & \frac{1}{a-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-2}{a} & 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{a}{a-1} & \frac{-1}{a-1} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{-1}{a-1} & \frac{1}{a-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-2}{a} & 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{a}{a-1} & \frac{-1}{a-1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{a-2}{a(a-1)} & \frac{1}{a-1} & \frac{-1}{a} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-2}{a} & 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$$

On a donc

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{a}{a-1} & \frac{-1}{a-1} & 0 \\ \frac{a-2}{a(a-1)} & \frac{1}{a-1} & \frac{-1}{a} \\ \frac{-2}{a} & 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$$

et les coordonnées de v dans $\mathcal{F}$ sont

$$P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{a-1}x - \frac{1}{a-1}y \\ \frac{a-2}{a(a-1)}x + \frac{1}{a-1}y - \frac{1}{a}z \\ -\frac{2}{a}x + \frac{1}{a}z \end{pmatrix}$$

Exercice 2. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Les coordonnées de $f(x,y,z)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ sont données par $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x+y+3z \\ x-2y-3z \\ -x+y+2z \end{pmatrix}$. Donc $(x,y,z) \in \ker(f)$ si et seulement si (x,y,z) est solution du système

$$\begin{cases} -2x+y+3z &= 0 \\ x-2y-3z &= 0 \\ -x+y+2z &= 0 \end{cases}$$

Un algorithme de Gauss donne

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 + L_1]{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{3}L_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow -\frac{1}{3}L_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le système s'écrit donc

$$\left\{\begin{array}{rcl} x - z & = & 0 \\ y + z & = & 0 \end{array}\right.$$

et l'ensemble des solutions donne

$$\ker(f) = \{(z, -z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \{z(1, -1, 1) \mid z \in \mathbb{R}\} = \mathrm{vect}((1, -1, 1)).$$

2. On a $u = (1, -1, 1)$. On calcule le déterminant de la famille (u, v, w) dans la base canonique :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

où on a soustrait la dernière ligne à la première et développé suivant la première ligne. Ce déterminant est non nul, donc (u, v, w) est une base.

Pour calculer la matrice de f dans cette base, il y a deux possibilités.

Première méthode. On note P la matrice de passage de la base canonique vers (u, v, w) et on calcule P^{-1}. La matrice de f dans la base (u, v, w) est alors $P^{-1}AP$. On a

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

un algorithme de Gauss-Jordan donne

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et la matrice de f dans la base (u, v, w) est donc

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Seconde méthode. En utilisant la matrice de f dansla base canonique, on calcule $f(u)$, $f(v)$ et $f(w)$ et on détermine leurs coordonnées dans la base (u, v, w). Ici, on obtient

$$\begin{array}{l} f(u) = 0 = 0.u + 0.v + 0.w \\ f(v) = (-1, 2, -1) = -v = 0.u - 1.v + 0.w \\ f(w) = (-2, 1, -1) = -w = 0.u + 0.v - 1.w \end{array}$$

Les coordonnées respectives de $f(u)$, $f(v)$ et $f(w)$ dans la base (u, v, w) sont donc $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, et la matrice de f dans cette base est donc

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3. La matrice de f^{2n+1} dans la base (u, v, w) est B^{2n+1}, et comme cette matrice est diagonale, on a

$$B^{2n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{2n+1} & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{2n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = B$$

Comme f et f^{2n+1} ont la même matrice dans cette base, on a $f = f^{2n+1}$.

Exercice 3. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$. Un scalaire λ est une valeur propre de f s'il existe un vecteur $u \neq 0$ tel que $f(u) = \lambda u$.

1. On raisonne par double implication.

   Supposons que λ est valeur propre de f. Il existe donc un vecteur $u \neq 0$ tel que $f(u) = \lambda u$ et on a

   $$(f - \lambda \mathrm{id})(u) = f(u) - \lambda u = 0$$

   donc $u \in \ker(f - \lambda \mathrm{id})$. Comme $u \neq 0$, on a $\ker(f - \lambda \mathrm{id}) \neq \{0\}$.

   Supposons maintenant que $\ker(f - \lambda \mathrm{id}) \neq \{0\}$. Il existe donc $u \neq 0$ tel que $(f - \lambda \mathrm{id})(u) = 0$. On a alors $f(u) - \lambda u = 0$ et $f(u) = \lambda u$. Comme $u \neq 0$, λ est valeur propre de f.

2. D'après la question précédente, λ est valeur propre si et seulement si $f - \lambda \mathrm{id}$ n'est pas injective. Comme $f - \lambda \mathrm{id}$ est un endomorphisme, elle est non-injective si et seulement si elle n'est pas bijective, si et seulement si sa matrice est de déterminant nul.

   La matrice de $f - \lambda \mathrm{id}$ est $A - \lambda I$, donc λ est valeur propre si et seulement si $\det(A - \lambda I) = 0$.

3. Comme (u, v) est une famille de deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$, il suffit de montrer qu'elle est libre.

   Soient α et β tels que $\alpha u + \beta v = 0$. En prenant l'image par f on obtient

   $$0 = f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v) = \alpha \lambda u + \beta \mu v.$$

   On a donc les deux équations

   $$\begin{array}{rcl} \alpha u + \beta v & = & 0 \\ \alpha \lambda u + \beta \mu v & = & 0 \end{array}$$

   En multipliant la première par λ et en la soustrayant à la seconde on obtient

   $$\beta(\mu - \lambda) v = 0.$$

   Comme $\lambda \neq \mu$ et comme $v \neq 0$, on a $\beta = 0$. La première équation devient alors $\alpha u = 0$, et comme $u \neq 0$, on a également $\alpha = 0$.

   On a donc $\alpha = \beta = 0$ et la famille (u, v) est libre. C'est donc une base de $\mathbb{R}^2$.

   Comme

   $$\begin{array}{c} f(u) = \lambda u = \lambda u + 0v \\ f(v) = \mu v = 0u + \mu v \end{array}$$

   les coordonnées respectives de $f(u)$ et $f(v)$ dans la base (u, v) sont $\begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ \mu \end{pmatrix}$. La matrice de f dans la base (u, v) est donc

   $$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}.$$