Université de Montpellier - Faculté des Sciences

Année Universitaire 2017-2018

HLMA206 : Devoir Encadré 1

Vendredi 9 février 2018

La rédaction est une part importante du travail : toutes les affirmations doivent être justifiées, les raisonnements et les calculs présentés de façon claire.

Exercice 1. Soient a et b deux nombres complexes et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, d_n le déterminant suivant (où n désigne la taille de la matrice) :

$$d_n = \begin{vmatrix} a+b & b & \cdots & b \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ a & \cdots & a & a+b \end{vmatrix}$$

1. Pour tout entier $n \geq 2$ déterminer une relation de récurrence entre d_n et d_{n-1}.
2. En déduire l'expression de d_n en fonction de n, a et b.

Exercice 2. On considère dans $\mathbb{R}^4$ les trois sous-espaces vectoriels suivant :

$$E = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + t = 0\}, \quad F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + 2z - t = 0\}$$

et

$$G = \mathrm{vect}(u_1, u_2) \quad \text{où} \quad u_1 = (1,0,1,1) \text{ et } u_2 = (3,-1,1,0)$$

1. On note $H = E \cap F$, déterminer une famille de deux vecteurs (v_1, v_2) qui engendre H.
2. Montrer que $G + H = \mathrm{vect}(u_1, u_2, v_1, v_2)$ et en déduire une représentation cartésienne de $G + H$. La somme est-elle directe ?

Exercice 3. Soient $u, v, w, z \in \mathbb{R}^3$ donnés par $u = (1,0,-1)$, $v = (3,-2,3)$, $w = (2,-1,1)$ et $z = (0,-1,2)$. La famille (u,v,w) est-elle libre? Génératrice de $\mathbb{R}^3$? Si elle n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^3$, déterminer $\mathrm{vect}(u,v,w)$.

Même question pour la famille (v,w,z).

Exercice 4. Soit $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_p)$ une famille de $\mathbb{K}^n$.

1. On suppose qu'il existe $k \in \{1, \ldots, p\}$ tel que $u_k \in \mathrm{vect}(\mathcal{G})$, où $\mathcal{G} = (u_1, \ldots, u_{k-1}, u_{k+1}, \ldots, u_p)$ est la famille $\mathcal{F}$ privée de u_k. Montrer que la famille $\mathcal{F}$ est liée.
2. Montrer la réciproque du point précédent.
3. On suppose que la famille $\mathcal{F}$ est libre et qu'il existe $v \in \mathbb{K}^n$ tel que $v \notin \mathrm{vect}(\mathcal{F})$. Montrer que la famille $(u_1, \ldots, u_p, v)$ est libre.