HLMA206 : Devoir Encadré 1

—

Corrigé

Ce document propose **une** correction des exercices du devoir encadré. Pour les exercices 1 et 2, il y a plusieurs stratégies de calculs possibles. Pour la question 1 de l'exercice 2, il y a plusieurs réponses possibles.

Exercice 1. Soient a et b deux nombres complexes et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, d_n le déterminant suivant (où n désigne la taille de la matrice) :

$$d_n = \begin{vmatrix} a+b & b & \cdots & b \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ a & \cdots & a & a+b \end{vmatrix}$$

1. En retranchant la seconde colonne à la première on obtient

$$d_n = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ -b & a+b & b & \cdots & b \\ 0 & a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & a & \cdots & a & a+b \end{vmatrix}$$

En développant suivant la première colonne :

$$d_n = ad_{n-1} + b \begin{vmatrix} b & b & b & \cdots & b \\ a & a+b & b & \cdots & b \\ a & a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b \\ a & a & \cdots & a & a+b \end{vmatrix}$$

En retranchant la première colonne à toutes les suivantes :

$$d_n = ad_{n-1} + b \begin{vmatrix} b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a & b & b-a & \cdots & b-a \\ a & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b-a \\ a & 0 & \cdots & 0 & b \end{vmatrix}$$

En développant suivant la première ligne :

$$d_n = ad_{n-1} + b^2 \begin{vmatrix} b & b-a & \cdots & b-a \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b-a \\ 0 & \cdots & 0 & b \end{vmatrix} = ad_{n-1} + b^n$$

On a utilisé le fait que le dernier déterminant est le déterminant d'un matrice triangulaire de taille $(n-2, n-2)$ en raison des deux développements précédents.

2. Les calculs des premiers termes donnent :

$$\begin{aligned} d_1 &= a+b \\ d_2 &= ad_1 + b^2 = a^2+ab+b^2 \\ d_3 &= ad_2+b^3 = a^3+a^2b+ab^2+b^3 \\ d_4 &= ad_3+b^4 = a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4 \end{aligned}$$

On peut formuler l'hypothèse que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété $\mathcal{P}_n$ suivante est vraie :

$$\mathcal{P}_n : \quad d_n = a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \cdots + a^2b^{n-2} + ab^{n-1} + b^n = \sum_{k=0}^{n} a^{n-k}b^k$$

Cette propriété se démontre par récurrence :

– Pour $n=1$ on a $d_1 = a+b = \sum_{k=0}^{1} a^{1-k}b^k$, donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.
– Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie. On a alors

$$\begin{aligned} d_{n+1} &= ad_n + b^{n+1} \\ &= a\sum_{k=0}^{n} a^{n-k}b^k \quad + \quad b^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} a^{n+1-k}b^k \quad + \quad a^0b^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} a^{n+1-k}b^k \end{aligned}$$

La propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est donc vraie.

On a montré par récurrence que $d_n = \sum_{k=0}^{n} a^{n-k}b^k$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Première remarque. L'expression de d_n peut s'écrire plus simplement.

Si $a=0$, alors d_n est le déterminant d'une matrice triangulaire et $d_n = b^n$.

Supposons maintenant que $a \neq 0$, en factorisant par a^n on obtient

$$d_n = a^n \sum_{k=0}^{n} a^{-k}b^k = a^n \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{b}{a}\right)^k$$

Si $b=a$ on a alors $d_n = (n+1)a^n$, et si $b \neq a$, en utilisant la somme des premiers termes d'une suite géométrique on obtient

$$d_n = a^n \frac{1-\left(\frac{b}{a}\right)^{n+1}}{1-\frac{b}{a}} = \frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}$$

Seconde remarque. Dans le cas où $a \neq b$, on peut calculer d_n sans utiliser de preuve par récurrence. Le déterminant d'une matrice étant égal au déterminant de sa transposée, on a aussi

$$d_n = \begin{vmatrix} a+b & a & \cdots & a \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \cdots & b & a+b \end{vmatrix}$$

et les opérations de calcul de la question 1 donnent une autre formule de récurrence où les rôles de a et b sont échangés : $d_n = bd_{n-1} + a^n$ et on a les deux équations

$$\left\{ \begin{array}{lcl} d_n &=& ad_{n-1}+b^n \\ d_n &=& bd_{n-1}+a^n \end{array} \right.$$

En multipliant la première par b, la seconde par a et en faisant la différence on obtient $(a-b)d_n = a^{n+1} - b^{n+1}$ et, si $a \neq b$,

$$d_n = \frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}$$

Exercice 2. On considère dans $\mathbb{R}^4$ les trois sous-espaces vectoriels suivant :

$$E = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + t = 0\}, \quad F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + 2z - t = 0\}$$

et

$$G = \mathrm{vect}(u_1, u_2) \quad \text{où} \quad u_1 = (1,0,1,1) \text{ et } u_2 = (3,-1,1,0)$$

1. $(x,y,z,t) \in E \cap F$ si et seulement si

$$\left\{\begin{array}{rcl} x - y \quad\quad + t &=& 0 \\ x + y + 2z - t &=& 0 \end{array}\right.$$

On cherche donc les solutions de ce système. Un algorithme de Gauss donne

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} &\xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{L_2 \leftarrow \frac{1}{2} L_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

D'où

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& -z \\ y &=& -z + t \end{array}\right.$$

et

$$\begin{aligned} H &= \{(-z, -z+t, z, t) \mid z, t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{z(-1,-1,1,0) + t(0,1,0,1) \mid z, t \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathrm{vect}(v_1, v_2). \end{aligned}$$

où $v_1 = (-1,-1,1,0)$ et $v_2 = (0,1,0,1)$.

2. On montre par double inclusion que $G + H = \mathrm{vect}(u_1, u_2, v_1, v_2)$.

Soit $w \in G+H$. Il existe $w_G \in G$ et $w_H \in H$ tels que $w = w_G + w_H$. Comme $w_G \in G = \mathrm{vect}(u_1, u_2)$, il existe $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tels que $w_G = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$. De même, comme $w_H \in H = \mathrm{vect}(v_1, v_2)$, il existe $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ tels que $w_H = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2$. On obtient

$$w = w_G + w_H = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2,$$

donc w est combinaison linéaire des vecteurs u_1, u_2, v_1, v_2, et on en déduit que $w \in \mathrm{vect}(u_1, u_2, v_1, v_2)$ et $G + H \subset \mathrm{vect}(u_1, u_2, v_1, v_2)$.

Soit $w \in \mathrm{vect}(u_1, u_2, v_1, v_2)$. Il existe donc $u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathbb{R}$ tels que $w = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2$. En notant $w_G = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$ et $w_H = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2$ on a $w = w_G + w_H$ avec $w_G \in \mathrm{vect}(u_1, u_2) = G$ et $w_H \in \mathrm{vect}(v_1, v_2) = H$. Donc $w \in G + H$ et $\mathrm{vect}(u_1, u_2, v_1, v_2) \subset G + H$.

On a montré par double inclusion que $G + H = \mathrm{vect}(u_1, u_2, v_1, v_2)$.

Par ce qui précède, on a $G+H = \mathrm{vect}((1,0,1,1), (3,-1,1,0), (-1,-1,1,0), (0,1,0,1))$ donc $(x,y,z,t) \in G + H$ si et seulement si il existe a, b, c et d tels que

$$\begin{aligned} (x,y,z,t) &= a(1,0,1,1) + b(3,-1,1,0) + c(-1,-1,1,0) + d(0,1,0,1) \\ &= (a + 3b - c, -b - c + d, a + b + c, a + d), \end{aligned}$$

c'est à dire, si et seulement si le système suivant est compatible :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a + 3b - c &=& x \\ -b - c + d &=& y \\ a + b + c &=& z \\ a + d &=& t \end{array}\right.$$

Un algorithme de Gauss donne :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & x \\ 0 & -1 & -1 & 1 & y \\ 1 & 1 & 1 & 0 & z \\ 1 & 0 & 0 & 1 & t \end{pmatrix} \xrightarrow[L_4 \leftarrow L_4 - L_1]{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & x \\ 0 & -1 & -1 & 1 & y \\ 0 & -2 & 2 & 0 & z-x \\ 0 & -3 & 1 & 1 & t-x \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_4 \leftarrow L_4 - 3L_2]{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & x \\ 0 & -1 & -1 & 1 & y \\ 0 & 0 & 4 & -2 & z-x-2y \\ 0 & 0 & 4 & -2 & t-x-3y \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 - L_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & x \\ 0 & -1 & -1 & 1 & y \\ 0 & 0 & 4 & -2 & z-x-2y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t-z-y \end{pmatrix}$$

Le système est compatible si et seulement si $t-z-y=0$ donc $G+H = \{(x,y,z,t) \mid t-z-y=0\}$.

La somme est directe si et seulement si $G \cap H = \{0\}$.

Première méthode. Soit $w = (x,y,z,t) \in G \cap H$. Comme $w \in G$, il existe $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tels que $w = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$ et on a

$$(x,y,z,t) = (\alpha_1 + 3\alpha_2, -\alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1).$$

Par ailleurs, comme $w \in H$, x,y,z,t sont solutions du système

$$\begin{cases} x - y \qquad + t &= 0 \\ x + y + 2z - t &= 0 \end{cases}$$

donc $w \in G \cap H$ si et seulement si α_1, α_2 sont solutions de

$$\begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_2 + \alpha_1 &= 0 \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_2 + 2\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_1 &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 + 4\alpha_2 &= 0 \\ 2\alpha_1 + 4\alpha_2 &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left\{ \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \right.$$

En choisissant par exemple $\alpha_1 = -2$ et $\alpha_2 = 1$ on obtient $-2u_1 + u_2 \in G \cap H$, et comme $-2u_1 + u_2 \neq 0$ on a $G \cap H \neq \{0\}$. La somme n'est pas directe.

Seconde méthode. En utilisant les arguments de dimension, on s'évite quelques calculs. Les vecteurs u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires, donc (u_1, u_2) est une famille libre et $G = \operatorname{vect}(u_1, u_2)$ est de dimension 2. De même, $v_1 = (-1,-1,1,0)$ et $v_2 = (0,1,0,1)$ ne sont pas colinéaires et H est de dimension 2. On a donc

$$\dim(G \cap H) = \dim(G) + \dim(H) - \dim(G+H) = 4 - \dim(G+H).$$

Comme $G + H \neq \mathbb{R}^4$ on a $\dim(G+H) \leq 3$ et $\dim(G \cap H) \geq 1$. La somme n'est pas directe.

Exercice 3. Soient $u, v, w, z \in \mathbb{R}^3$ donnés par $u = (1,0,-1)$, $v = (3,-2,3)$, $w = (2,-1,1)$ et $z = (0,-1,2)$.

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, on a

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = (\alpha + 3\beta + 2\gamma, -2\beta - \gamma, -\alpha + 3\beta + \gamma)$$

donc $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$ si et seulement si α, β, γ sont solutions du système

$$\begin{cases} \alpha + 3\beta + 2\gamma &= 0 \\ -2\beta - \gamma &= 0 \\ -\alpha + 3\beta + \gamma &= 0 \end{cases}$$

La résolution de ce système donne

$$\begin{cases} \alpha + 3\beta + 2\gamma &= 0 \\ -2\beta - \gamma &= 0 \\ -\alpha + 3\beta + \gamma &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 3\beta + 2\gamma &= 0 \\ -2\beta - \gamma &= 0 \\ 6\beta + 3\gamma &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 3\beta + 2\gamma &= 0 \\ -2\beta - \gamma &= 0 \\ 0 &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha &= \beta \\ \gamma &= -2\beta \end{cases}$$

où on a ajouté la première équation à la dernière, puis trois fois la seconde à la dernière. Ce système possède donc une infinité de solutions, et il existes des coefficients $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ non tous nuls tels que $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$. La famille n'est donc pas libre.

Pour savoir si (u, v, w) est génératrice de $\mathbb{R}^3$, on détermine $\text{vect}(u, v, w)$. Pour un vecteur quelconque $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on a $(a, b, c) \in \text{vect}(u, v, w)$ si et seulement si il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha u + \beta v + \gamma w = (a, b, c)$. Comme $\alpha u + \beta v + \gamma w = (\alpha + 3\beta + 2\gamma, -2\beta - \gamma, -\alpha + 3\beta + \gamma)$, on a $\alpha u + \beta v + \gamma w = (a, b, c)$ si et seulement si α, β, γ sont solutions du système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \alpha + 3\beta + 2\gamma & = & a \\ -2\beta - \gamma & = & b \\ -\alpha + 3\beta + \gamma & = & c \end{array} \right.$$

On cherche donc à savoir à quelles conditions sur a, b, c ce système est compatible. comme précédemment on a

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \alpha + 3\beta + 2\gamma & = & a \\ -2\beta - \gamma & = & b \\ -\alpha + 3\beta + \gamma & = & c \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha + 3\beta + 2\gamma & = & a \\ -2\beta - \gamma & = & b \\ 6\beta + 3\gamma & = & a + c \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha + 3\beta + 2\gamma & = & a \\ -2\beta - \gamma & = & b \\ 0 & = & a + 3b + c \end{array} \right.$$

Donc le système est compatible si et seulement si $a + 3b + c = 0$ et

$$\text{vect}(u, v, w) = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a + 3b + c = 0\}.$$

En particulier, (u, v, w) n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^3$.

Pour la famille (v, w, z) on raisonne de façon similaire. Commençons par déterminer $\text{vect}(v, w, z)$. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, pour tout $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ on a

$$\alpha v + \beta w + \gamma z = (3\alpha + 2\beta, -2\alpha - \beta - \gamma, 3\alpha + \beta + 2\gamma)$$

donc $(a, b, c) \in \text{vect}(v, w, z)$ si et seulement si le système suivant est compatible :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 3\alpha + 2\beta & = & a \\ -2\alpha - \beta - \gamma & = & b \\ 3\alpha + \beta + 2\gamma & = & c \end{array} \right.$$

Les calculs donnent

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 3\alpha + 2\beta & = & a \\ -2\alpha - \beta - \gamma & = & b \\ 3\alpha + \beta + 2\gamma & = & c \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 3\alpha + 2\beta & = & a \\ \frac{1}{3}\beta - \gamma & = & \frac{2}{3}a + b \\ -\beta + 2\gamma & = & -a + c \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 3\alpha + 2\beta & = & a \\ \frac{1}{3}\beta - \gamma & = & \frac{2}{3}a + b \\ -\gamma & = & a + 3b + c \end{array} \right.$$

Comme les coefficients diagonaux sont tous non nuls, ce système est toujours compatible, et pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha v + \beta w + \gamma z = (a, b, c)$. Donc $\text{vect}(v, w, z) = \mathbb{R}^3$ et (v, w, z) est génératrice de $\mathbb{R}^3$.

Pour déterminer si la famille est libre, on se donne $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha v + \beta w + \gamma z = 0$. On a alors α, β, γ solutions de

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 3\alpha + 2\beta & = & 0 \\ -2\alpha - \beta - \gamma & = & 0 \\ 3\alpha + \beta + 2\gamma & = & 0 \end{array} \right.$$

et des calculs similaires aux précédents donnent α, β, γ solutions de

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 3\alpha + 2\beta & = & 0 \\ \frac{1}{3}\beta - \gamma & = & 0 \\ -\gamma & = & 0 \end{array} \right.$$

Comme les coefficients diagonaux sont non nuls, on en déduit que $\alpha = \beta = \gamma = 0$, donc la famille est libre.

Remarque. La correction présentée ici n'utilise pas les arguments de dimension qui n'avaient pas été travaillés en TD avant ce devoir encadré. Cependant, ces arguments permettent d'éviter bien des calculs. Comme on s'intéresse à des familles de 3 vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 3, un telle famille $\mathcal{F}$ est libre si et seulement si elle est génératrice. Il suffit donc de déterminer $\text{vect}(\mathcal{F})$: si on montre que $\text{vect}(\mathcal{F}) = \mathbb{R}^3$ alors $\mathcal{F}$ est génératrice et nécessairement libre, si $\text{vect}(\mathcal{F}) \neq \mathbb{R}^3$ alors $\mathcal{F}$ n'est pas génératrice et nécessairement liée.

Exercice 4. Soit $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p)$ une famille de $\mathbb{K}^n$.

1. Soit $k \in \{1, \dots, p\}$ tel que $u_k \in \operatorname{vect}(\mathcal{G})$, où $\mathcal{G} = (u_1, \dots, u_{k-1}, u_{k+1}, \dots, u_p)$. Il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_p$ tels que
$$u_k = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{p} \lambda_i u_i$$
et on a
$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{p} \lambda_i u_i - u_k = 0.$$
C'est une combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{F}$ qui s'annule et dont les coefficients ne sont pas tous nuls (puisque le coefficient de u_k est -1). La famille $\mathcal{F}$ est donc liée.

2. Supposons que $\mathcal{F}$ est liée. Il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, des scalaires qui ne sont pas tous nuls, tels que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i = 0$. Soit $k \in \{1, \dots, p\}$ tel que $\lambda_k \neq 0$. On a
$$\lambda_k u_k = -\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{p} \lambda_i u_i$$
et comme $\lambda_k \neq 0$ on obtient
$$u_k = -\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{p} \frac{\lambda_i}{\lambda_k} u_i \in \operatorname{vect}(u_1, \dots, u_{k-1}, u_{k+1}, \dots, u_p).$$
On a bien montré qu'il existe $k \in \{1, \dots, p\}$ tel que $u_k \in \operatorname{vect}(\mathcal{G})$, où $\mathcal{G}$ est la famille $\mathcal{F}$ privée de u_k.

3. On suppose que la famille $\mathcal{F}$ est libre et qu'il existe $v \in \mathbb{K}^n$ tel que $v \notin \operatorname{vect}(\mathcal{F})$.

   Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p, \mu$ des scalaires tels que
$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i + \mu v = 0.$$
   On veut montrer que tous ces scalaires sont nuls.

   Si $\mu \neq 0$ on peut diviser par μ et on obtient
$$v = -\sum_{i=1}^{p} \frac{\lambda_i}{\mu} u_i \in \operatorname{vect}(\mathcal{F}),$$
   ce qui est impossible car $v \notin \operatorname{vect}(\mathcal{F})$ par hypothèse. On a donc $\mu = 0$ et $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i = 0$. Comme la famille $\mathcal{F}$ est libre, on en déduit que $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$.

   Tous les coefficients de la combinaison linéaire considérée sont nuls, la famille $(u_1, \dots, u_p, v)$ est donc libre.