TD 4 : Matrices d'applications linéaires, changement de base

Matrices d'applications linéaires

Exercice 1 :
Écrire les matrices des applications suivantes dans les bases canoniques.

$$\begin{array}{lll} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 & \mathbb{C} \to \mathbb{C} & \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{P}_2[x] \\ (x,y,z) \mapsto (x-y, 2x+z, x+3y-z), & z \mapsto \exp(i\alpha)z, & p \mapsto p(x-2), \end{array}$$

$\mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}$

$$p \mapsto \int_0^1 p(x)\mathrm{d}x.$$

Exercice 2 :
Dans chacun des cas suivants, exprimer l'application φ dont la matrice dans les bases canoniques est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,
2. $\varphi : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$,
3. $\varphi : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^3$.

Exercice 3 :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ telle que $\varphi \circ \varphi = \varphi$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(\varphi) \cap \mathrm{Im}(\varphi) = \{0_{\mathbb{K}^n}\}$.
2. En utilisant que tout $x \in \mathbb{K}^n$ peut s'écrire $x = (x - \varphi(x)) + \varphi(x)$, montrer que $\mathrm{Ker}(\varphi) + \mathrm{Im}(\varphi) = E$.
3. En déduire qu'on peut construire une base $\mathcal{E}$ de $\mathbb{K}^n$ en concaténant une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(\varphi)$. On suppose que $\mathcal{E}$ est une telle base par la suite.
4. Montrer que $\varphi(x) = x$ pour tout $x \in \mathrm{Im}(\varphi)$.
5. En déduire la matrice de φ dans la base $\mathcal{E}$.

Changement de base

Exercice 4 :
Soit l'application $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} 7 & 25 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

1. Trouver un vecteur non nule $\mathbf{e}$ puis un vecteur $\tilde{\mathbf{e}}$ tels que

$$\varphi(\mathbf{e}) = 2\mathbf{e}, \quad \varphi(\tilde{\mathbf{e}}) = 2\tilde{\mathbf{e}} + \mathbf{e}.$$

2. Montrer que $\mathcal{E} = (\mathbf{e}, \tilde{\mathbf{e}})$ est une base de $\mathbb{R}^2$ puis calculer la matrice de φ dans cette base.

Exercice 5 :
Soit $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ est

$$\begin{pmatrix} -1/2 & 3/2 & 3/2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 5/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

On note $\mathcal{E}$ la famille contenant les trois vecteurs

$$\tilde{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \quad \tilde{\mathbf{e}}_2 = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \quad \tilde{\mathbf{e}}_3 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3.$$

Exprimer la matrice φ dans la base $\mathcal{E}$.

Exercice 6 :
Soit $\varphi = \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ telle que

$$\varphi(x, y, z) = (-x + y + z, -6x + 4y + 2z, 3x - y + z).$$

1. Écrire la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que $\varphi \circ \varphi = 2\varphi$. En déduire que, pour tout $\mathbf{e} \in \mathrm{Im}(\varphi)$, on a $\varphi(\mathbf{e}) = 2\mathbf{e}$.
3. Montrer que $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(\varphi)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
4. Construire une base de $\mathbb{R}^3$ dont le premier vecteur est un vecteur de $\mathrm{Ker}\varphi$ et le dernier un vecteur de $\mathrm{Im}\varphi$. Écrire la matrice de φ dans cette base.
5. Trouver une équation linéaire caractérisant les composantes des éléments de $\mathrm{Im}(\varphi)$.

Pour aller plus loin

Exercice 7 :
Soit f une application linéaire sur $\mathbb{R}^3$ telle que $f \neq 0$ et $f^2 = 0$.

1. Démontrer que $\dim(\ker(f)) = 2$.
2. En déduire qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8 :
Soit u l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans leur base canonique respective est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

On appelle (e_1, e_2, e_3) la base canconique de $\mathbb{R}^3$ et (f_1, f_2) celle de $\mathbb{R}^2$. On pose

$$e'_1 = e_2 + e_3, \quad e'_2 = e_3 + e_1, \quad e'_3 = e_1 + e_2,$$

et

$$f'_1 = \frac{1}{2}(f_1 + f_2), \quad f'_2 = \frac{1}{2}(f_1 - f_2).$$

1. Montrer que (e'_1, e'_2, e'_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ puis que (f'_1, f'_2) est une base de $\mathbb{R}^2$.
2. Quelle est la matrice de u dans ces nouvelles bases ?

Exercice 9 :
Soient $A \in M_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ tels que

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Démontrer que $BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.